

Devoir en temps libre °3

Exercice I

Pour $x > 0$, on pose pour tout entier naturel n

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$$

et on considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$.

1. Montrer que la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. On note f sa somme.
2. Montrer que la convergence de la série de fonction est en fait uniforme sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. Que peut-on en déduire ? (On énoncera avec soin le théorème utilisé).
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$. On donnera deux preuves.
4. La convergence est-elle uniforme sur $]0, +\infty[$?
5. La convergence est-elle normale sur $]0, +\infty[$? sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$?
6. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer $f'(x)$ pour $x > 0$. Déterminer les variations de f .
7. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer $f^{(p)}(x)$ pour $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}$.
8. Montrer que f est convexe.
9. Montrer que si $x > 0$, on a

$$f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x} \quad (E)$$

En déduire un équivalent de f en 0^+ .

10. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$ (on pourra utiliser (E) ainsi que la monotonie de f).
11. Montrer que $f(x) - \frac{1}{x}$ admet une limite ℓ en 0^+ que l'on exprimera à l'aide d'une somme d'une série numérique.
12. Détermination de ℓ .

(a) Pour tout entier n , calculer $\int_0^1 t^n dt$.

(b) Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt$$

(c) En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

et en déduire la valeur de ℓ .

13. Représenter la courbe de la fonction f .

Exercice II

Soit $r \in]0, 1[$ fixé.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction p_n par $\forall t \in \mathbb{R}, \quad p_n(t) = r^n \cos(nt)$.
 - (a) Montrer la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions de terme général p_n .
 - (b) Pour tout réel t , on pose alors $P(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)$.

En remarquant que $2 \cos(nt) = e^{-int} + e^{int}$, justifier l'égalité

$$P(t) = \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r \cos(t) + 1}$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodique.

(a) Justifier que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On définit alors $g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t)dt$.

On note aussi $g_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = c_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)dt \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)dt \quad g_n(x) = r^n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Justifier alors l'égalité : $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.

(c) Montrer que la fonction g ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: pour cela, on précisera l'usage du théorème du cours concernant la classe $\mathcal{C}^1$ d'une fonction somme de série de fonctions.

3. On considère E l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et qui sont 2π -périodiques.

À toute fonction $f \in E$, on associe $g = \Pi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t)dt$$

- (a) En utilisant les questions précédentes, montrer que g est définie, 2π -périodique et continue.
- (b) Justifier que l'application Π ainsi définie est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel E .

Fin

