

Suites et séries de fonctions

Table des matières

I	Introduction	3
	A Quelques remarques historiques	3
	B Programme officiel	4
II	Suite de fonctions. Convergence	6
	A Suite de fonctions	6
	B Exemple de suites de fonctions	6
	C Convergence simple d'une suite de fonctions	7
	D Convergence uniforme d'une suite de fonctions	10
	1) Définition de la convergence uniforme	10
	2) Norme de la convergence uniforme	11
	3) Non convergence uniforme	14
	E Étude de la limite d'une suite de fonction	15
	1) Continuité de la limite d'une suite de fonction	15
	2) Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions	16
	3) Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions	18
	F Remarques de fin de section	19
III	Séries de fonctions	20
	A Définition d'une série de fonctions	20
	B Convergence d'une série de fonctions	20
	1) Convergence simple	20
	2) Convergence uniforme	21
	3) Convergence normale d'une série de fonctions	22
	C Continuité de la somme	24
	D Théorème de la double limite	26
	E Intégration terme à terme d'une série de fonctions	27
	F Dérivation terme à terme d'une série de fonctions	28
	G Exemples	30
IV	Non dérivabilité de la fonction de Weierstrass	35
V	Exercices	38
	A Convergence simple d'une suite de fonctions	38
	B Convergence uniforme d'une suite de fonctions	38
	C Séries de fonctions	40
VI	Exercices corrigés	42
	A Suites de fonctions	42
	B Convergence uniforme d'une suite de fonctions	44
	C Séries de fonctions	54

Index

continuité de la limite uniforme, [16](#)
convergence normale d'une série de fonctions,
[22](#)
convergence simple d'une suite de fonctions,
[7](#)
convergence simple d'une série de fonctions,
[20](#)
convergence uniforme d'une suite de fonctions,
[10](#)
convergence uniforme d'une série de fonctions,
[21](#)
convergence uniforme localisée, [16](#)

double limite, [26](#)
dérivabilité de la limite, [18](#)

fonction reste partiel, [20](#)
fonction somme d'une série de fonctions, [20](#)

interversion d'une limite et d'une somme infinie, [24](#)
interversion de limites, [16](#)
interversion du signe somme (infinie) et de la
dérivée, [28](#)
interversion du signe somme (infinie) et du signe
intégral, [27](#)
interversion intégrale-limite, [16](#)

limite simple, [7](#)

majoration uniforme, [11](#)

norme de la convergence uniforme, [11](#)

suite de fonctions, [6](#)
suite des sommes partielles, [20](#)
série de fonctions, [20](#)

I Introduction

A Quelques remarques historiques

La définition rigoureuse de la convergence uniforme est due à WEIERSTRASS¹, pour les séries de fonctions, dans un article de 1841², en reprenant les idées de son maître Gudermann qui parlait de convergence « Konvergenz im ganzen gleichen Grad » dès 1838³. Cauchy aussi, dans son mémoire de 1853, introduit de façon rigoureuse la notion, sans parler de convergence uniforme, mais d'un critère (dit de Cauchy, critère hors programme), là encore pour les séries de fonctions.

C'est WEIERSTRASS qui le premier énonce et démontre les théorèmes sur la continuité, la dérivabilité et l'intégrabilité de la somme d'une série de fonctions. La preuve est restée la même : on coupe ε en trois parties, en tenant compte de la convergence uniforme pour deux, de la continuité pour la dernière.

La convergence normale est définie par BAIRE en 1908⁴.

On a représenté une fonction de WEIERSTRASS avec $a = 0.8$ et $b = 10$ et une somme tronquée à 20 termes.

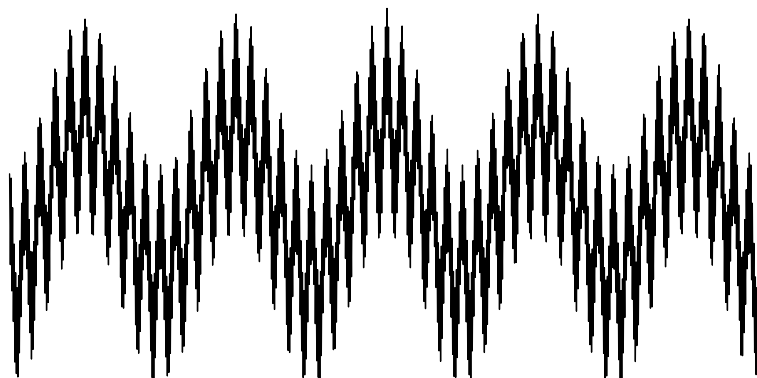


FIGURE 1 – Une fonction $\mathcal{W}$ monstrueuse

1. mathématicien allemand, (1815–1897). Il est considéré comme le père de l'analyse moderne. On lui doit par exemple les définitions de la continuité et de la dérivabilité avec les ε, δ avec lesquelles les démonstrations peuvent être faites de manière rigoureuse ; il donne un exemple d'une fonction continue partout et nulle part dérivable, la fonction dite désormais de WEIERSTRASS définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

avec $0 < a < 1$ et $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

2. K. Weierstrass, Zur Theorie der Potenzreihen, *Math. Werke, t. I, pp. 67-74, Mayer und Müller, Berlin, 1894.*

3. P. Dugac, Éléments d'analyse de Karl Weierstrass, *Arch. for Hist. of Exact Sci., t 10, pp. 41-176, 1973.*

4. BAIRE est connu pour avoir montré que l'ensemble des points de continuité de la dérivée d'une fonction dérivable est dense

B Programme officiel

B - Suites et séries de fonctions

Cette section a pour objectif de définir différents modes de convergence d'une suite, d'une série de fonctions et d'étudier le transfert à la limite, à la somme des propriétés de des fonctions.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions.

La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.

Utilisation d'une majoration uniforme de $|f_n(x)|$ pour établir la convergence normale de $\sum f_n$.

La convergence normale entraîne la convergence uniforme.

La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point.

b) Régularité de la limite d'une suite de fonctions

Continuité de la limite d'une suite de fonctions :

si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge uniformément vers f sur I , alors f est continue sur I .

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions :

si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions :

si (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I converge simplement sur I vers une fonction f , et si que la suite (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction g , alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sous l'hypothèse de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ et de convergence simple des $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leq j \leq k-1$.

c) Régularité de la somme d'une série de fonctions

Continuité de la somme d'une série de fonctions :

si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur I converge uniformément sur I , alors sa somme est continue sur I .

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de la double limite :

si une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n , f_n admet une limite finie ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum \ell_n$

converge, la somme de la série admet une limite en a et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment :

si une série $\sum f_n$ de fonctions continues converge uniformément sur $[a, b]$ alors la série

des intégrales est convergentes et on a :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Dérivation terme à terme d'une série de fonctions :

si une série $\sum f_n$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ converge simplement sur un intervalle I et si la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur I , alors la

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment de I ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée

Extension à la classe $\mathcal{C}^k$ sous hypothèse similaire à celle décrite dans le cas des suites de fonctions.

est $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

II Suite de fonctions. Convergence

A Suite de fonctions

DÉFINITION 1. Soit I un intervalle^a de $\mathbb{R}$, on appelle **suite de fonctions** à valeurs réelles ou complexes une suite d'éléments de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, c'est à dire une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. On utilise la notation $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{K}) \\ n &\longmapsto f_n \end{aligned}$$

a. On se place sur un intervalle d'après le programme officiel. on peut aisément étendre à un domaine D de $\mathbb{R}$

B Exemple de suites de fonctions

- On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^n$$

On peut représenter la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

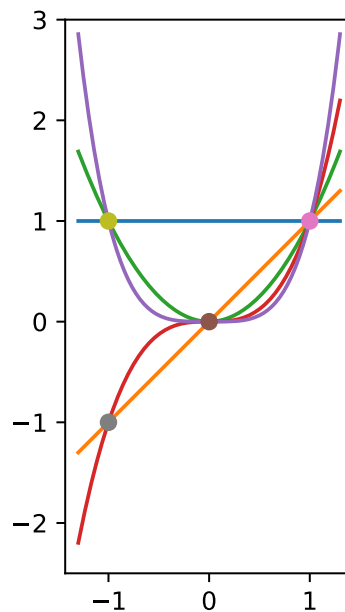


FIGURE 2 – La suite de fonctions $(x \mapsto x^n)$

et en particulier sur $[0, 1]$:

- On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \cos(nx)$$

On peut représenter la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

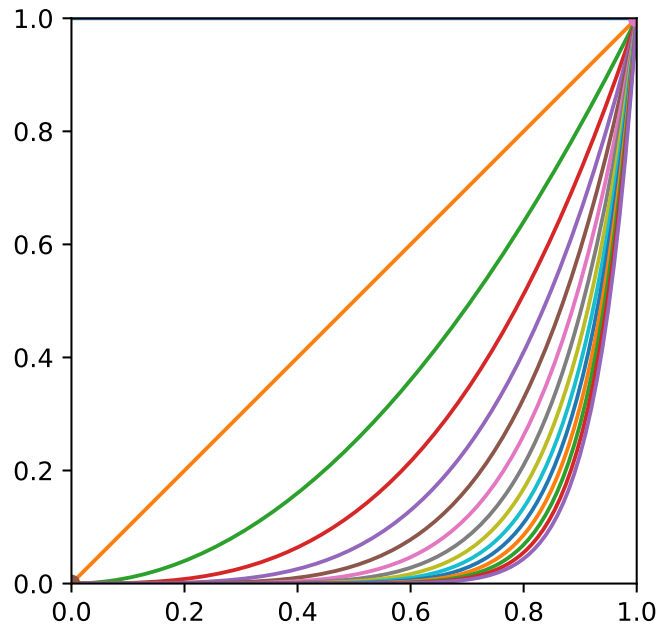


FIGURE 3 – La suite de fonctions $(x \mapsto x^n)$ sur $[0, 1]$

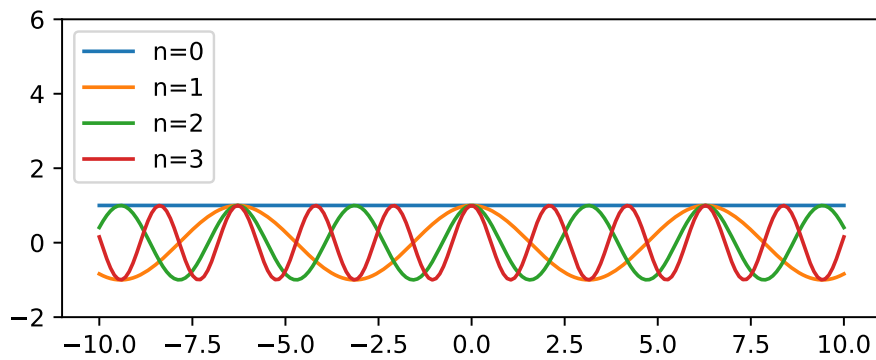


FIGURE 4 – La suite de fonctions $(x \mapsto \cos(nx))$

C Convergence simple d'une suite de fonctions

DÉFINITION 2. On dit qu'une suite de fonctions (f_n) **converge simplement**^a si pour tout x de I , la suite $(f_n(x))$ converge.

Dans ce cas, on note $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))$, ce qui définit une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ de sorte que

$$\forall x \in I, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

La fonction f est appelée la **limite simple** de la suite de fonctions (f_n) . On écrit

$$f_n \xrightarrow[I]{cvs} f$$

On remarquera que par unicité de la limite, la limite simple d'une suite de fonctions, si elle existe, est unique.

a. on peut voir la convergence simple comme une convergence point par point

- On considère la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$.

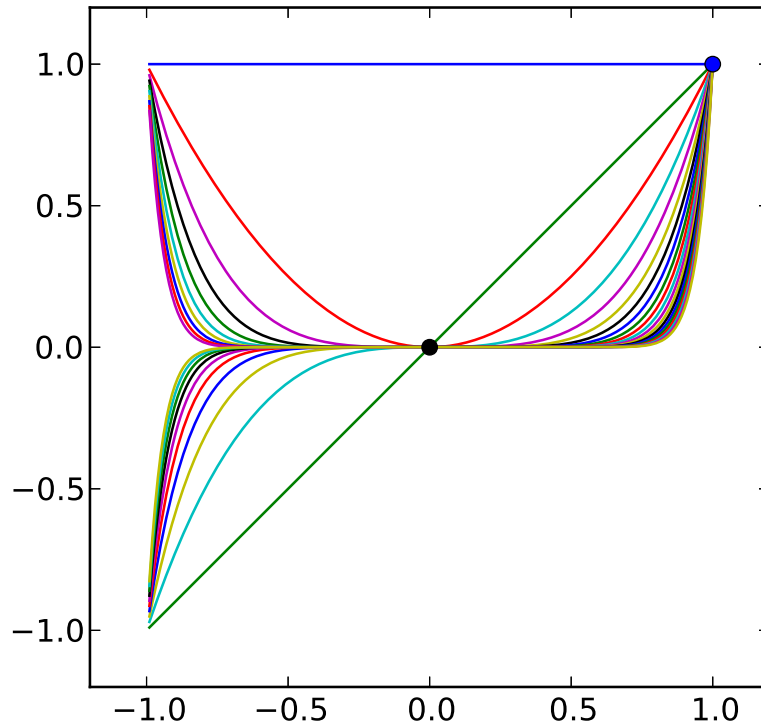


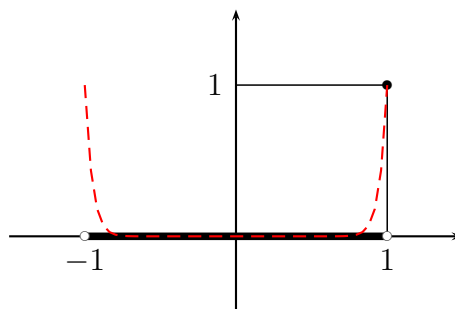
FIGURE 5 – La suite de fonctions $(x \mapsto x^n)$ sur $] -1, 1]$

On sait que la suite numérique (x^n) converge si et seulement si $x \in] -1, 1]$, vers 0 pour $x \in] -1, 1[$ et vers 1 si $x = 1$.

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $] -1, 1]$ vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in] -1, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On représente (en gras) la limite simple de la suite de fonctions (f_n) , avec une fonction f_n , n grand pair :



On remarquera que la fonction f limite simple de la suite de fonctions continues (f_n) sur $] -1, 1]$ n'est pas continue (en 1). C'est un point essentiel du chapitre : le passage à la limite simple ne préserve pas la continuité, attention.

• Par exemple, on considère la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1 + n^2 x}{1 + n^2 x^4}$$

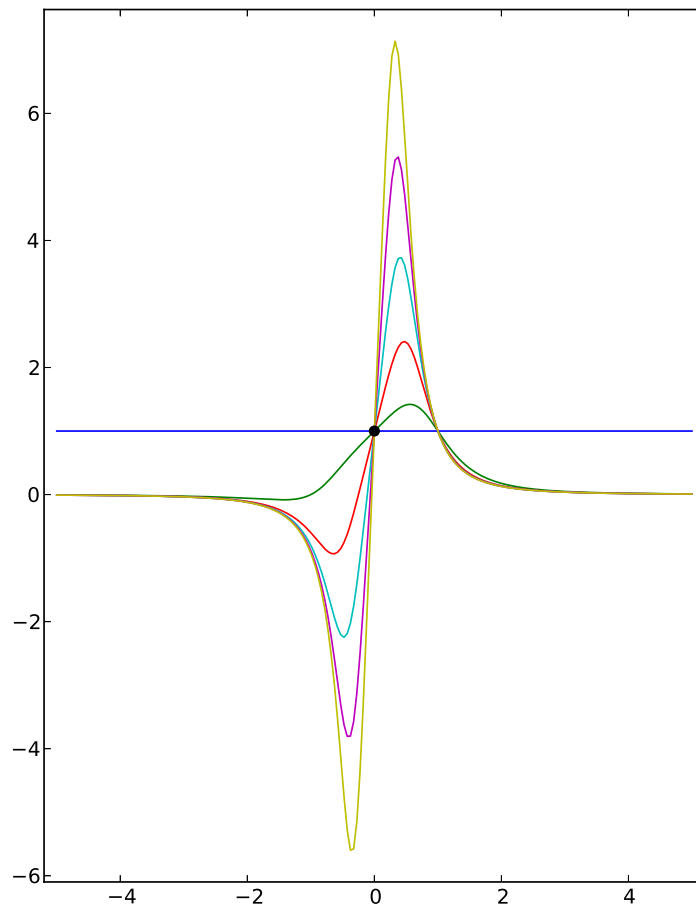


FIGURE 6 – La suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}$

- si $x = 0$, $f_n(0) = 1$, la suite $(f_n(0))$ converge vers 1.
- si $x \neq 0$, on a $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$, et ainsi la suite $(f_n(x))$ converge vers $\frac{1}{x^3}$.

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x^3} & \text{sinon} \end{cases}$$

On constate là encore, que la suite de fonctions (f_n) est une suite de fonctions continue. Par contre, la limite simple f n'est pas continue en 0. On retiendra que le passage à la limite simple peut créer des discontinuités. Ainsi la convergence simple ne conserve pas la continuité par passage à la limite. Une notion supplémentaire est visiblement nécessaire pour obtenir la continuité de la limite simple : il s'agit de la notion de convergence uniforme.

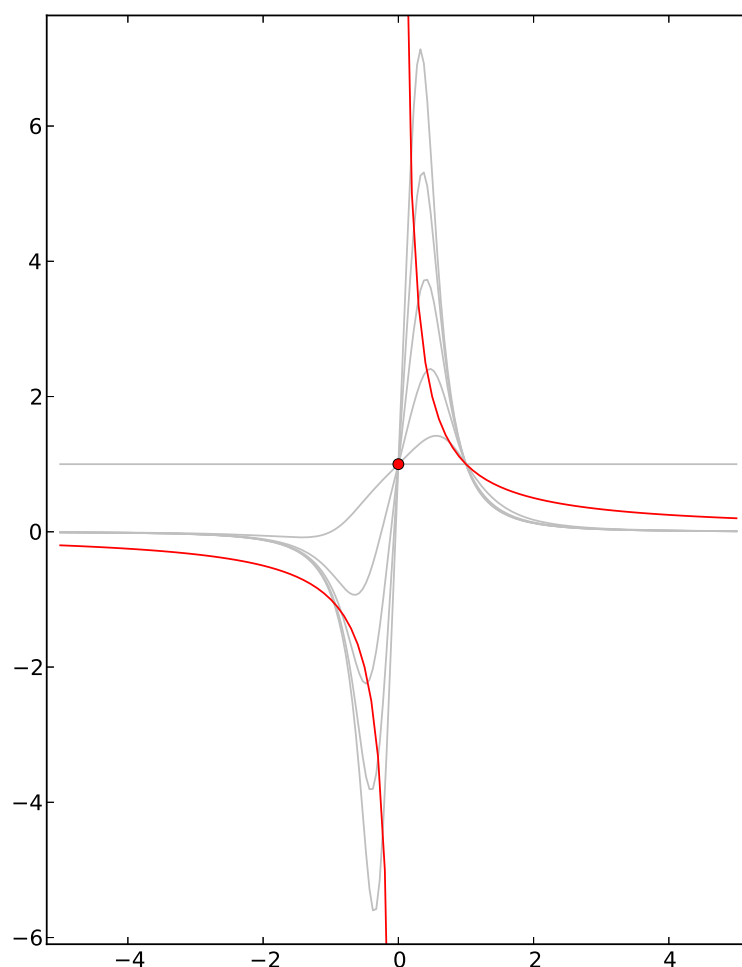


FIGURE 7 – La suite de fonctions $\left(x \mapsto \frac{1+n^2x}{1+n^2x^4}\right)$ sur $\mathbb{R}$ et sa limite simple

D Convergence uniforme d’une suite de fonctions

1) Définition de la convergence uniforme

DÉFINITION 3. On dit qu’une suite de fonctions (f_n) **converge uniformément** sur I s’il existe une fonction f définie sur I telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \implies \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

On dira que (f_n) converge uniformément vers f sur I .

Graphiquement, cela signifie que pour toute précision $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel les courbes représentatives de f_n sont toutes dans le tube ou plutôt la bande de rayon ε définie autour de la courbe représentative de f :

On remarquera vu la définition que :

PROPOSITION 1. La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si la suite de fonctions $(f_n - f)$ converge uniformément vers 0.

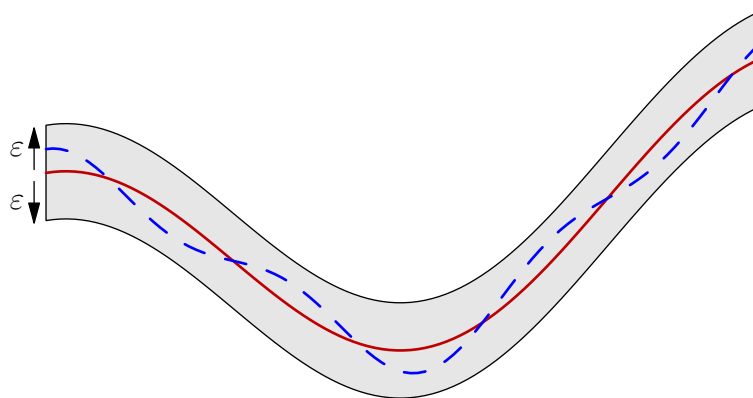


FIGURE 8 – Visualisation de la convergence uniforme

PROPOSITION 2. Si une suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f alors les fonctions $f_n - f$ sont bornée à partir d'un certain rang, et cette borne peut-être choisie aussi petite que l'on veut (mais le rang devient de plus en grand à priori)

PROPOSITION 3. La convergence uniforme d'une suite de fonctions implique la convergence simple. Plus précisément, si (f_n) converge uniformément vers f sur I , alors (f_n) converge simplement vers f sur I .

Preuve :

On suppose que (f_n) converge uniformément vers f sur I . Alors prenons x fixé dans I , on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

et ainsi la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$. Ainsi (f_n) converge bien simplement vers f sur I . ★

• Par exemple, on considère la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n+1}$$

Nous avons ici ⁵

$$\left| \frac{\sin(nx)}{n+1} - 0 \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

Comme la suite $(\frac{1}{n+1})$ converge vers 0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N_ε à partir duquel $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$ et ainsi à partir de ce rang, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a

$$\left| \frac{\sin(nx)}{n+1} - 0 \right| \leq \varepsilon$$

Ainsi (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

2) Norme de la convergence uniforme

En vue de simplification, nous allons généraliser la méthode utilisée dans l'exemple précédent. On utilise pour cela la norme infinie dite aussi *norme de la convergence uniforme* $\| \cdot \|_\infty$ sur l'espace vectoriel des fonctions bornées sur I définie par

$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

5. on parle de *majoration uniforme* (qui est uniforme selon x , qui ne dépend pas de x)

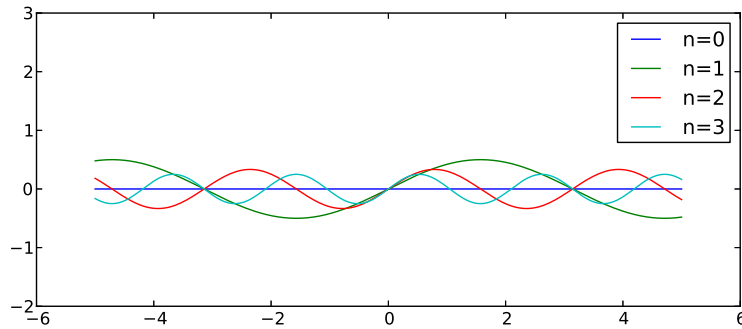


FIGURE 9 – La suite de fonctions $\left(x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n+1}\right)$

PROPOSITION 4. Soit (f_n) une suite de fonctions bornées, f une fonction bornée. On pose (il suffit en fait que $f_n - f$ soit bornée)

$$M_n = \|f_n - f\|_\infty$$

Alors (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si la suite numérique (M_n) converge vers 0, soit en d'autres termes, la convergence uniforme est la convergence selon la norme infinie (dans l'espace des fonctions bornées).

Preuve :

Il suffit de remarquer que

$$M_n \leq \varepsilon \iff \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

★

✂ En pratique, nous ne sommes pas obligé de calculer M_n exactement : il suffit d'obtenir une majoration $M_n \leq \alpha_n$ avec (α_n) une suite qui converge vers 0.

• Ceci conduit à une méthodologie : par exemple, on considère la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = xe^{-nx}$$

On commence par étudier la convergence simple :

– si $x = 0$, $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

– si $x > 0$, $f_n(x) = xe^{-nx} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f nulle sur $\mathbb{R}_+$.

On détermine M_n : ici, on précise M_n par une étude de la fonction g_n définie par $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$. Nous avons g_n dérivable

$$g_n(x) = xe^{-nx} \quad g'_n(x) = e^{-nx} - nxe^{-nx} = e^{-nx}(1 - nx)$$

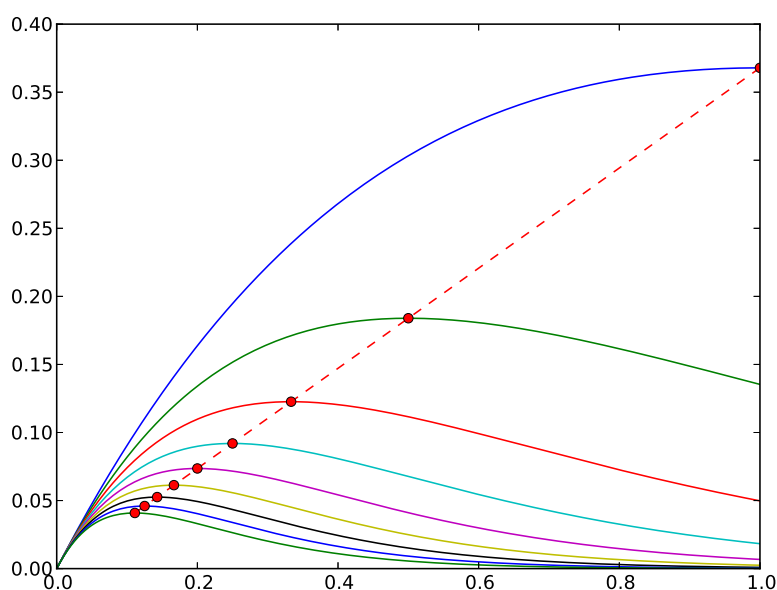
On en déduit les variations de g_n pour $n \geq 1$:

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$g'_n(x)$	-	0	+
g_n	0 ↗ $\frac{1}{en}$ ↘ 0		

Lorsque $n \geq 1$, on obtient un maximum en $x = \frac{1}{n}$, qui est

$$g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{en}$$

Ainsi pour $n \geq 1$, on obtient $M_n = \frac{1}{en}$. La suite (M_n) converge donc vers 0 et ainsi la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers sa limite simple qui est la fonction nulle.



Graphiquement, on visualise bien la suite des bornes supérieures M_n (hauteur des points) qui converge vers 0, ce qui entraîne le fait que les fonctions f_n tendent vers 0, mais de manière globale ou uniforme, et pas seulement « point par point ».

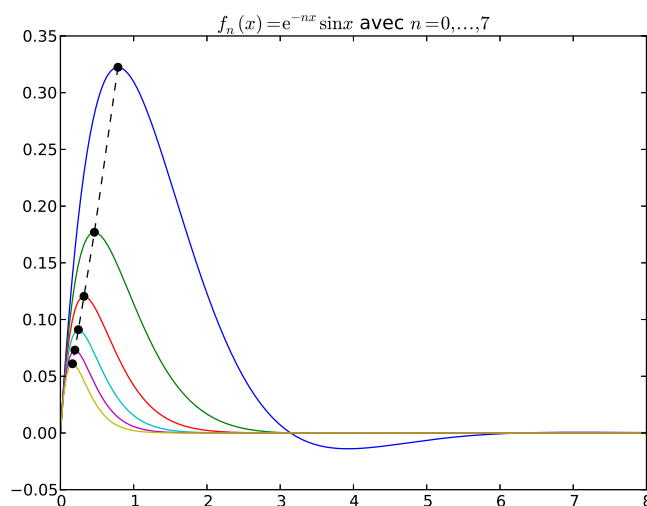
- On considère la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = e^{-nx} \sin x$$

Comme

$$|f_n(x) - 0| \leq x e^{-nx}$$

l'étude précédente montre que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.



La majoration nous évite d'étudier précisément les variations de f_n , qui sont un peu plus délicates ici⁶.

Précisons le fait suivant :

PROPOSITION 5. Soit (f_n) une suite de fonctions bornées sur I qui converge uniformément vers une fonction f sur I . Alors f est aussi bornée.

Preuve :

On note B_n la borne de f_n . Prenons $\varepsilon = 1$. Il existe un rang N à partir duquel pour tout x de I , $|f_n(x) - f(x)| \leq 1$. Alors

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq 1 + B_n$$

et ainsi la fonction f est bornée sur I . ★

3) Non convergence uniforme

Donnons ici déjà une première méthode pour montrer qu'une convergence simple n'est pas uniforme.

PROPOSITION 6. Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers la fonction f sur I . Si il existe une suite (a_n) de I telle que la suite $(|f_n(a_n) - f(a_n)|)$ ne converge pas vers 0, alors la convergence de la suite de fonctions (f_n) n'est pas uniforme.

Preuve :

On donne une preuve valide dans le cas où les fonctions ne sont pas forcément bornées et où la norme uniforme ne peut être utilisée. Si la convergence était uniforme, soit $\varepsilon > 0$, on aurait l'existence d'un rang à partir duquel pour tout x de I , $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ et en particulier pour $x = a_n$, $|f_n(a_n) - f(a_n)| \leq \varepsilon$. Et ainsi $(f_n(a_n) - f(a_n))$ devrait converger vers 0, ce qui est absurde.

Si on peut utiliser la norme uniforme, on écrit simplement que $M_n \geq |f_n(a_n) - f(a_n)|$ et ainsi M_n ne peut converger vers 0 : la convergence ne peut pas être uniforme. ★

6. mais faisables tout de même : on peut montrer que M_n ici vaut $|f_n(\text{Arctan } \frac{1}{n})|$ dont un équivalent est $\frac{1}{en^2}$. Mais tout cela est long est inutile !

- On reprend la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{1 + n^2x}{1 + n^2x^4}$$

qui converge simplement vers la fonction f définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = \frac{1}{x^3}$ pour $x \neq 0$. Comme

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1+n}{1+\frac{1}{n^2}} - n^3 = \frac{n^2+n^3}{1+n^2} - n^3 \sim -n^3$$

qui ne tend pas vers 0, la convergence n'est pas uniforme⁷.

E Étude de la limite d'une suite de fonction

1) Continuité de la limite d'une suite de fonction

Nous avons vu dans les exemples que la notion de continuité n'est pas préservée lors du passage à la limite pour une suite de fonctions continues. On dispose cependant d'un théorème permettant de conclure tout de même dans certaines conditions :

THÉORÈME 7. Soit (f_n) une suite de fonctions continues en $a \in I$ qui converge uniformément sur I vers une fonction f . Alors f est continue en a .

Preuve :

On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur I , avec les fonctions f_n continues en a . Montrons que f est continue en a .

Soit $\varepsilon > 0$, pour la précision $\frac{\varepsilon}{3} > 0$, il existe un rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ à partir duquel pour tout x de I , on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \\ &\leq \frac{2}{3}\varepsilon + |f_n(x) - f_n(a)| \end{aligned}$$

Or la fonction f_n est continue en a , pour la précision $\frac{1}{3}\varepsilon > 0$, il existe donc un voisinage V de a sur lequel

$$|f_n(x) - f_n(a)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$$

et ainsi sur ce même voisinage on obtient finalement

$$|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Donc la fonction f est continue en a . ★

COROLLAIRE 1. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur I qui converge uniformément sur I vers une fonction f . Alors la fonction f est continue.

La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue.

7. on verra que la non continuité de f bien que les f_n le soient sera un argument encore plus efficace

Nous obtenons ainsi un théorème d'*intversion de limites*, qui exprime la *continuité de la limite uniforme* :

COROLLAIRE 2. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur I qui converge uniformément sur I et $a \in I$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

Preuve :

En effet si on note f la limite uniforme de la suite de fonctions (f_n) , c'est l'écriture de

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a)$$



En pratique, nous n'aurons pas forcément la convergence uniforme sur tout l'intervalle I , mais une *convergence uniforme localisée*, ce qui entraîne une continuité localisée puis donc globalisée (mais attention, il n'y a pas alors convergence uniforme globalisée)

THÉORÈME 8. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur I qui converge uniformément sur tout segment de I ou sur d'autres intervalles adaptés à I (ils doivent recouvrir I par réunion) vers une fonction f . Alors la fonction f est continue sur I .

Preuve :

En effet, d'après le théorème précédent, on obtient la continuité de la fonction f sur tout segment de I , donc sur I . ★

On obtient ainsi un moyen parfois commode pour montrer que la convergence n'est pas uniforme : on reprend la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{1 + n^2 x}{1 + n^2 x^4}$$

qui converge simplement vers la fonction f définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = \frac{1}{x^3}$ pour $x \neq 0$. Comme la fonction f n'est pas continue en 0 alors que les fonctions f_n le sont, on peut en déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

2) Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions

THÉORÈME 9. Soit (f_n) une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction f sur le segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b (f) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt$$

On parle d'*intversion de l'intégrale et de la limite*.

Preuve :

Nous avons des fonctions continues sur un segment, elles sont donc bornées. On utilisera la norme de la convergence uniforme. Nous avons

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \int_a^b (f_n(t) - f(t)) dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt$$

Or $|f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty = M_n$ et ainsi

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b M_n dt = (b-a)M_n$$

Comme la suite (M_n) converge vers 0, $((b-a)M_n)$ aussi et ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

d'où le résultat. ★

• Exemple : déterminer, si elle existe, la limite de la suite I_n définie par

$$I_n = \int_1^2 \frac{1+n^2x}{1+n^2x^4} dx$$

Le calcul, bien que possible (fraction rationnel, hors programme en général) est bien trop compliqué.

Comme la suite (f_n) de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1+n^2x}{1+n^2x^4}$$

converge uniformément sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ vers la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

puisque que sur $[a, +\infty[$ (et sur $] -\infty, -a]$, on a

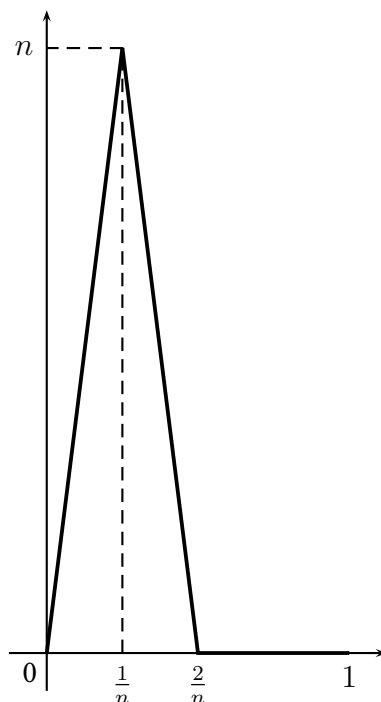
$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{1+n^2x}{1+n^2x^4} - \frac{1}{x^3} \right| = \left| \frac{x^3-1}{x^3(1+n^2x^4)} \right| \\ &\leq \frac{|x|^3+1}{|x|^3} \times \frac{1}{1+n^2x^4} && \leq \left(1 + \frac{1}{|x|^3}\right) \times \frac{1}{1+n^2x^4} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{a^3}\right) \times \frac{1}{1+n^2a^4} \end{aligned}$$

et donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[1, 2]$ et ainsi on a (I_n) qui converge de limite

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{4} \right] = \frac{3}{8}$$

• On peut utiliser ce théorème dans certains cas pour montrer qu'une convergence simple n'est pas uniforme. Par exemple, on considère la suite de fonctions (f_n) avec

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2n - n^2x & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle : soit $x \in [0, 1]$:

– si $x = 0$, $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

– si $x \in]0, 1]$, il existe un rang N_0 à partir duquel $\frac{2}{n} \leq x$, et ainsi $f_n(x) = 0$. Donc $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si la convergence était uniforme, on aurait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 0$$

Or

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1$$

d'où une contradiction.

Ceci dit, dans cet exemple simpliste, on a $M_n = \sup_{[0,1]} |f_n - f| = n$ et donc on obtient que la convergence n'est pas uniforme beaucoup plus directement.

3) Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions

On donne un théorème permettant de conclure la *dérivabilité de la limite* :

THÉORÈME 10. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement vers une fonction f telle que la suite des dérivées (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction h . Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a $f' = h$.

Preuve :

Comme la suite des fonctions dérivées (f'_n) est une suite de fonctions continues, qui converge uniformément vers une fonction h , la fonction limite h est continue.

On fixe a dans I , et soit x de I , comme

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$$

et comme (f'_n) converge uniformément vers h sur le segment d'extrémités a et x , on a en passant à la limite et en utilisant le théorème d'intégration de limite uniforme

$$f(x) = f(a) + \int_a^x h(t) dt$$

On en déduit que f est une primitive de h . Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a $f' = h$.

On remarquera qu'il suffit de connaître la convergence de $(f_n(a))$ pour pouvoir conclure à une convergence simple de la suite (f_n) . Ainsi les hypothèses du théorème peuvent être affaiblies (hors programme)

D'autre part, la convergence de (f_n) vers f est alors uniforme sur tout segment : en effet

$$f_n(x) - f(x) = \int_a^x (f'_n(t) - h(t)) + f_n(a) - f(a) dt$$

et ainsi sur le segment considéré S

$$|f_n(x) - f(x)| \leq L_S \|f'_n - h\|_{S,\infty} + |f_n(a) - f(a)|$$

soit encore

$$\|f_n - f\|_{S,\infty} \leq L_S \|f'_n - h\|_{S,\infty} + |f_n(a) - f(a)|$$

qui converge vers 0. ★

Ici encore, la convergence uniforme sur I peut être réduite à une convergence uniforme sur tout segment de I sans gêner la conclusion :

COROLLAIRE 3. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement vers une fonction f telle que la suite des fonctions dérivées (f'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h . Alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a $f' = h$.

Par récurrence sur k , on obtient le résultat suivant utilisable directement :

COROLLAIRE 4. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I telle que pour tout j avec si $0 \leq j \leq k-1$, la suite des fonctions dérivées j -ième $(f_n^{(j)})$ qui converge simplement vers une fonction h_j et la suite des dérivées $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h_k . Alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et on a pour tout j , $0 \leq j \leq k$, $f^{(j)} = h_j$.

F Remarques de fin de section

Si (f_n) converge simplement vers f , et que l'on a déterminé f , les résultats sont purement d'utilité théorique puisque la connaissance de f permet de contourner l'application des théorèmes !

Ceci dit, la forme négative des théorèmes peut-être utile. Par exemple, le fait qu'une suite de fonctions continues converge simplement vers une fonction qui n'est pas continue indique que la convergence n'est pas uniforme.

Autre exemple, si (avec les hypothèse requises sauf celle que l'on va contredire) l'interversion limite-intégrale est fautive, la convergence ne peut-être uniforme.

Par contre, en ce qui concerne les séries de fonctions, dont on associe la suite des sommes partielles, la somme n'est pas toujours connue de manière explicite. Les théorèmes vont s'appliquer avec toute leur puissance et permettre de déterminer des propriétés d'une fonction dont on connaît l'existence mais non l'expression explicite.

III Séries de fonctions

A Définition d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I . On pose sur I

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x)$$

DÉFINITION 4. La suite de fonctions (S_n) est appelée la **suite des sommes partielles** de la **série de fonctions** $\sum_{n \geq 0} (f_n)$.

B Convergence d'une série de fonctions

1) Convergence simple

DÉFINITION 5. On dit que la série de fonctions $\sum (f_n)$ **converge simplement** sur I si la suite de fonctions des sommes partielles (S_n) converge simplement sur I .

On note S la fonction limite de la suite de fonction (S_n) appelée **fonction somme** de la série $\sum (f_n)$. On définit aussi la **fonction reste partiel** R_n par

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$$

- Un exemple élémentaire : on considère la série de fonctions $\sum (f_n)$ avec $f_n(x) = x^n$ sur $] -1, 1[$. On sait que cette série de fonctions converge simplement vers la fonction S définie par

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

La fonction somme partielle S_n est définie par

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

et la fonction reste d'ordre n par

$$R_n(x) = S - S_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

- Exemple fondamental : on considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

On sait que cette série de fonctions converge simplement sur $]1, +\infty[$. On pose sur $]1, \infty[$

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

appelée fonction zêta de Riemann, associées aux séries de Riemann.

- Exemple fondamental : on considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ définie par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

On sait que cette série de fonctions converge simplement sur $]0, +\infty[$: on rappelle que si $x > 0$, la série numérique $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ vérifie le critère spécial des séries alternées, et donc converge ; pour $x \leq 0$, le terme général de la série numérique ne tend pas vers zéro, et donc la série diverge grossièrement.

On pose sur $]0, +\infty[$

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

2) Convergence uniforme

DÉFINITION 6. On dit que la série de fonctions $\sum (f_n)$ **converge uniformément** sur I si la suite de fonctions des sommes partielles (S_n) converge uniformément sur I .

PROPOSITION 11. La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément si et seulement si la suite de fonctions (S_n) converge simplement vers une fonction S et si la suite de fonctions $(R_n) = (S - S_n)$ converge uniformément vers la fonction nulle.

De manière analogue à la notion de divergence grossière pour les séries numériques on déduit :

PROPOSITION 12 (condition nécessaire). Si $\sum f_n$ est une série de fonctions qui converge uniformément, alors la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

Preuve :

On a lorsque $n \geq 1$, $f_n = R_{n-1} - R_n$. (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle, et ainsi (R_n) est une suite de fonctions bornées à partir d'un certain rang (voir exercice) ; on écrit alors à partir d'un certain rang $\|f_n\|_\infty \leq \|R_{n-1}\|_\infty + \|R_n\|_\infty$ d'où le résultat puisque (R_n) converge uniformément vers 0 et que donc la suite numérique $(\|R_n\|_\infty)$ converge vers 0. ★

Dans le cas où la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers 0, on peut parler de convergence non uniforme grossière.

- Exemple fondamental : on considère la série de fonctions $\sum (f_n)$ avec $f_n(x) = x^n$ sur $] -1, 1[$. On sait que cette série de fonctions converge simplement vers la fonction S définie par

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

La somme partielle S_n est définie par

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

et le reste d'ordre n par

$$R_n(x) = S - S_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Comme sur $[-r, r]$ avec $0 < r < 1$

$$|R_n(x)| \leq \frac{r^n}{1-r}$$

sur $[-r, r]$, on en déduit que (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[-r, r]$ et ainsi (S_n) converge uniformément vers S sur $[-r, r]$.

• Exemple fondamental : utilisation du critère spécial pour les séries alternées, sur la majoration des restes. On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ définie par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction η sur $]0, +\infty[$. On sait aussi, grâce à la majoration du reste pour les séries numériques vérifiant le critère spécial des séries alternées, que

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^x}$$

On se place sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ fixé. Alors on obtient la majoration uniforme

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^a}$$

et ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers η sur $[a, +\infty[$.

Par contre, la convergence n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$: en effet, si elle l'était, on aurait la suite de fonctions $(f_n) = \left(x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)$ qui convergerait uniformément vers 0 sur $]0, +\infty[$. Or les f_n ne sont pas bornées, ce qui contredit une condition nécessaire.

La convergence uniforme n'est pas toujours simple à établir. Pour le programme de PC, la convergence uniforme peut se montrer après avoir déterminé la limite simple (ce qui n'est pas forcément facile, les sommes infinies n'étant pas évidentes à déterminer ; le chapitre des séries entières donnera quelques résultats). La majoration du reste à l'aide du critère spécial des séries alternées est une méthodologie utilisable.

La convergence normale définie ci-après va permettre de souvent simplifier la méthodologie.

3) Convergence normale d'une série de fonctions

DÉFINITION 7. Soit (f_n) une suite de fonctions bornées sur un intervalle I . On dit que la série de fonctions $\sum (f_n)$ **converge normalement** si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

• Par exemple, on considère la série de fonctions $\sum (f_n)$ avec f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+n^2+x^2}$$

Les fonctions f_n sont bornées sur $\mathbb{R}$, par 1. De plus $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^2+1}$. Or la série numérique $\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge. Ainsi la série de fonctions $\sum (f_n)$ est une série normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

- Par exemple, on considère la série de fonctions $\sum(f_n)$ avec f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

Les fonctions f_n sont bornées sur $[a, +\infty[$. De plus $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^a}$. Or la série numérique $\sum \frac{1}{n^a}$ converge lorsque $a > 1$. Ainsi la série de fonctions $\sum(f_n)$ est une série normalement convergente sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.

L'intérêt de cette notion découle le résultat suivant, fondamental puisqu'il évite de déterminer la somme de la série de fonctions, somme qui dans certain cas est extrêmement difficile à obtenir.

THÉORÈME 13. *La convergence normale entraîne la convergence uniforme.*

Toute série de fonctions qui converge normalement, converge uniformément (et ainsi la série de fonction converge uniformément vers une certaine fonction dont on ne s'occupe pas, en tout cas dans un premier temps.)

Preuve :

On considère une série de fonctions $\sum(f_n)$ qui converge normalement sur un intervalle I .

Montrons déjà la convergence simple. Soit $a \in I$, on considère la série réelle ou complexe $\sum f_n(a)$.

On a

$$|f_n(a)| \leq \|f_n\|_\infty$$

et ainsi la série $\sum f_n(a)$ est absolument convergente. Donc elle converge, vers une limite que l'on note $S(a)$.

On définit ainsi une fonction S définie sur I de sorte que la série de fonctions $\sum(f_n)$ converge simplement vers S . Montrons que la convergence est en fait uniforme sur I .

Notons (S_n) la suite de fonctions des sommes partielles de la série $\sum(f_n)$, c'est à dire sur I

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

Nous avons pour tout x de I ,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et ainsi on obtient la convergence uniforme de la suite de fonctions des sommes partielles (S_n) vers S , c'est à dire la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum(f_n)$ vers S . ★

La convergence normale permet de ne pas s'occuper du signe des fonctions f_n . Cependant, elle ne permet pas de régler la convergence uniforme de tout type de série de fonctions oscillante. Dans cette situation particulière, on dispose de la majoration du reste des séries oscillantes vérifiant le critère spécial (qui reste lui aussi limité à certaines situations!).

- Par exemple, on considère la série de fonctions $\sum(f_n)$ avec f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

On a vu que la série de fonctions $\sum(f_n)$ est une série normalement convergente sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 1$. Ainsi la série de fonction converge uniformément sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.

• Donnons un exemple classique : on considère la série de fonctions $\sum(f_n)$ définie par les fonctions

$$f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

sur $[0, 1]$. On a $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ et ainsi la série de fonctions $\sum(f_n)$ n'est pas normalement convergente.

Mais pour tout x fixé, la série numérique $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Ainsi elle converge, vers $S(x)$, et on a une majoration du reste

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

On a donc ainsi une convergence uniforme de (R_n) vers la fonction nulle sur $[0, 1]$, et ainsi la série de fonctions $\sum(f_n)$ converge uniformément vers S sur $[0, 1]$ (on verra plus tard dans le chapitre sur les séries entières que la somme S est la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$).

C Continuité de la somme

THÉORÈME 14. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur I , qui converge uniformément sur I (ou seulement qui converge uniformément sur tout segment de I). Alors la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

Preuve :

On applique les résultats vus pour les suites de fonctions à la suite de fonctions (S_n) des somme partielles qui est alors une suites de fonctions continues sur I par sommation finie. ★

Il s'agit d'un théorème d'*intversion d'une limite et d'une somme infinie* :

COROLLAIRE 5. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur I , qui converge uniformément sur I (ou seulement qui converge uniformément sur tout segment de I). Alors pour tout a de I , on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

Preuve :

En effet, si on note S la somme de la série de fonctions, il s'agit de l'écriture e la continuité de S en a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} S(x) = S(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

★

• Par exemple, on considère la série de fonctions continues définie sur $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^2}$$

Comme

$$\left| \frac{\sin(nx)}{1+n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2+1}$$

la série de fonction est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, donc converge uniformément, vers une fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+1}$$

Cette fonction f est alors continue sur $\mathbb{R}$ (et on ne sait pas qui est f de manière explicite). Elle est aussi 2π périodique, de manière directe : en effet, on a pour tout x

$$f(x+2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin n(x+2\pi)}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2+1} = f(x)$$

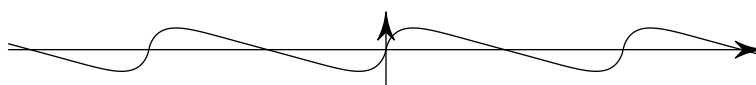
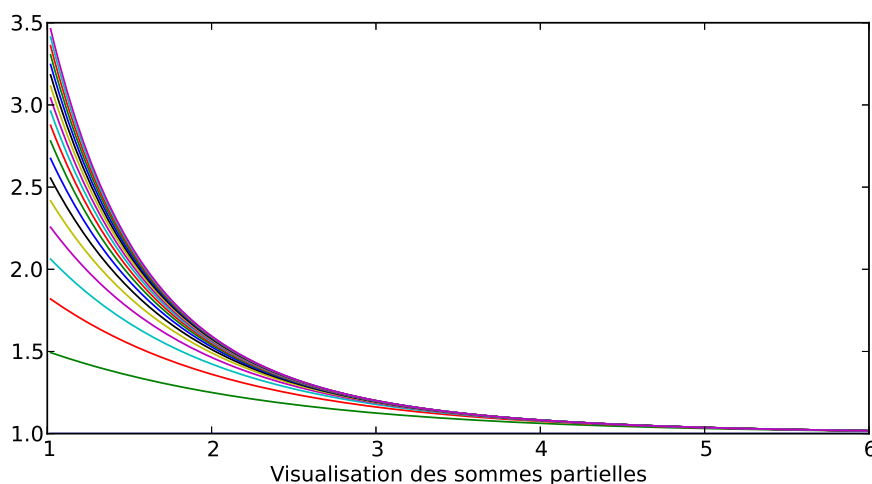


FIGURE 10 – La courbe de la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+1}$

- Par exemple, on considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (f_n)$ avec f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

On a vu que la série de fonctions $\sum (f_n)$ est une série normalement convergente sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 1$. Ainsi la série de fonction converge uniformément sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 1$, et comme il s'agit d'une séries de fonctions continues, la somme, la fonction ζ de Riemann est donc une fonction continue sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 1$, et ainsi sur $]1, +\infty[$.



Il resterait à étudier :

- la monotonie (facile);
- la limite en $+\infty$ (utilisation du théorème de la double limite) et en 1 (méthode particulière);

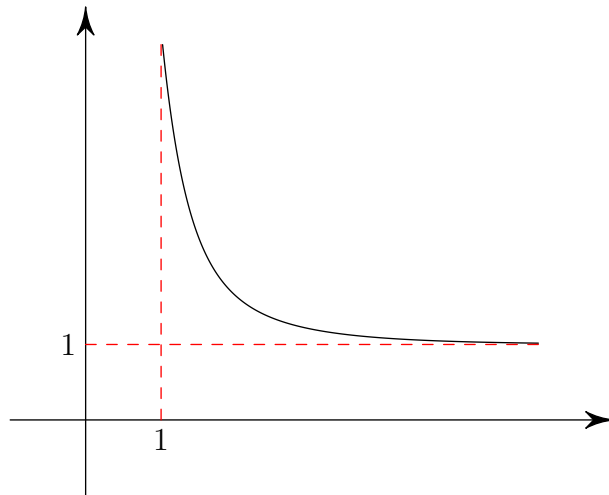


FIGURE 11 – La courbe de la fonction ζ de Riemann

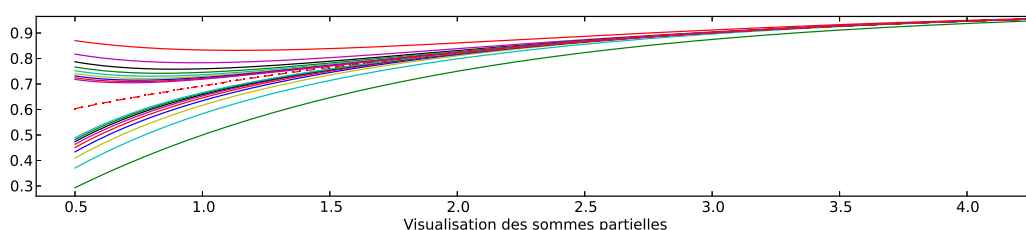
- un équivalent de f en 1^+ .
- la dérivabilité : voir plus loin.

• Par exemple, on considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (f_n)$ avec f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

On a vu que la série de fonctions $\sum (f_n)$ est une série uniformément convergente sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. Ainsi comme il s'agit d'une série de fonctions continues, la somme, la fonction η est donc une fonction continue sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 1$, et ainsi continue sur $]0, +\infty[$.

Il y a « alternance des courbes » autour de la limite (la convergence se ralentie lorsque l'on se rapproche de zéro) :



D Théorème de la double limite

Voici le théorème de la *double limite* :

THÉORÈME 15. Si une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n , f_n admet une limite finie ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

- Pour la fonction de Riemann, la limite en $+\infty$, nous avons vu la convergence uniforme sur $[2, +\infty[$ par exemple, et on a

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et ainsi la série numérique $\sum_{n \geq 1} \ell_n$ converge (ce n'est pas un scoop ici) et on a

$$\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1$$

Par contre, on ne peut pas utiliser le théorème pour la limite en 1 (pas de convergence uniforme au voisinage de 1).

- On peut utiliser ce théorème pour contredire la convergence uniforme (par exemple si la série $\sum \ell_n$ existe mais diverge).

E Intégration terme à terme d'une série de fonctions

THÉORÈME 16. Soit $\sum (f_n)$ une série de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ qui converge uniformément sur $[a, b]$. Alors la série des intégrales

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt$$

est convergente et on a :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt$$

(théorème d'interversion du signe somme (infinie) et du signe intégral)

Preuve :

On applique le théorème d'intégration à la suite de fonctions (S_n) des sommes partielles de la série $\sum (f_n)$: elle converge uniformément et ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b S_n(t) dt = \int_a^b S(t) dt$$

soit encore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(t) dt = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) dt$$

d'où le résultat. ★

On peut utiliser ce théorème dans certains cas pour montrer qu'une convergence simple n'est pas uniforme.

F Dérivation terme à terme d'une série de fonctions

THÉORÈME 17. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I . Si la série $\sum (f_n)$ converge simplement sur I et si la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur I , alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a

$$S' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$$

(théorème d'interversion du signe somme (infinie) et de la dérivée)

Preuve :

On pose $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$. Alors (S_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui converge simplement vers S .

On a $S'_n = \sum_{k=0}^n f'_k$ qui converge uniformément vers une fonction que l'on note h . D'après le théorème de dérivation pour les suites de fonctions, on a donc S de classe $\mathcal{C}^1$ et $S' = h$ soit

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = h = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$$

★

• Par exemple, on considère la série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

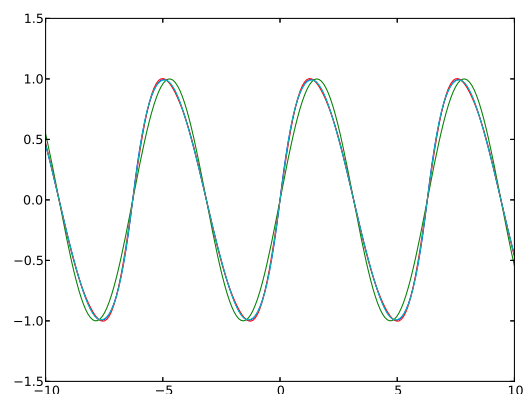
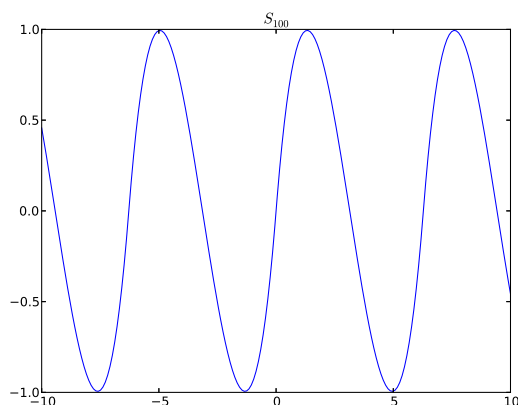
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

Cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$ puisque

$$\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$$

ce qui permet de définir sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$



et la série des dérivées

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

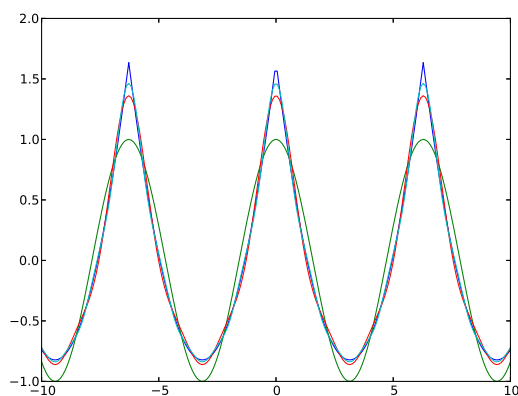
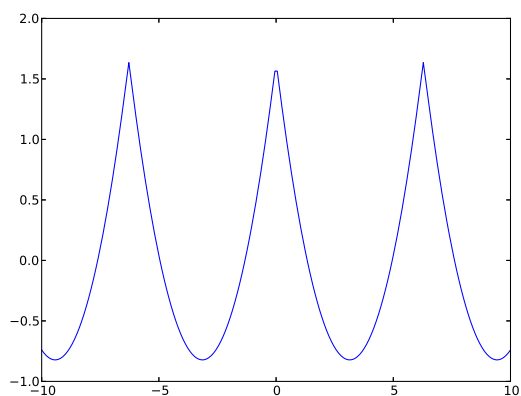
aussi, puisque

$$\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. Ainsi la série converge vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ et on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

On remarquera que f est impaire et 2π périodique.

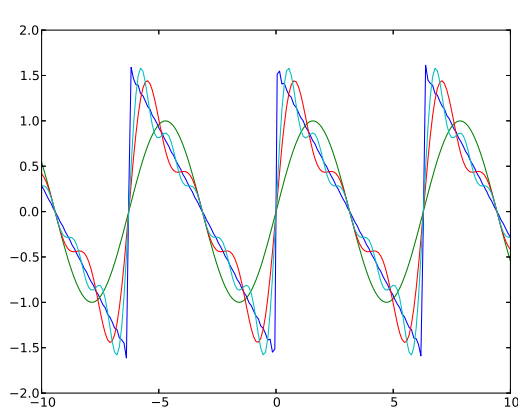
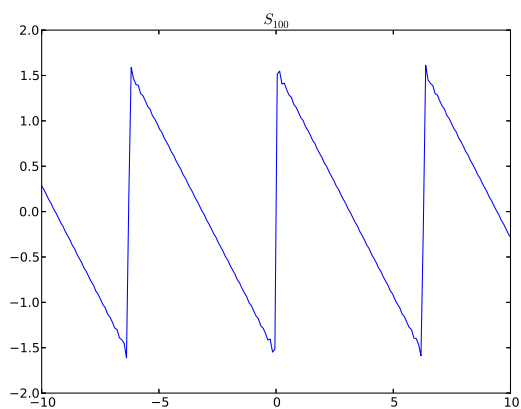


La dérivée de f

Par contre, la série des dérivées d'ordre deux

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

est plus difficile à étudier⁸.



La série des dérivées secondes

8. en réalité, cette série de fonctions ne converge pas uniformément, mais elle converge simplement par l'utilisation d'un critère dit d'Abel, hors programme. C'est aussi une série de Fourier

On voit que des discontinuités sont créées en chaque $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On donne une version indispensable en pratique :

THÉORÈME 18. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I . Si la série $\sum (f_n)$ converge simplement sur I et si la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment de I ou d'autres type d'intervalles adaptés (avec recouvrement de I par réunion), alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a

$$S' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$$

Preuve :

On applique le théorème précédent sur tout segment de I . ★

Par récurrence sur k , on obtient le résultat suivant utilisable directement :

COROLLAIRE 6. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I telle que pour tout j avec $0 \leq j \leq k-1$, la série $\sum (f_n^{(j)})$ qui converge vers une fonction h_j et la suite des dérivées $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h_k . Alors S est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et on a pour tout j , $0 \leq j \leq k$,

$$S^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$$

G Exemples

- La fonction ζ est définie sur $]1, +\infty[$ par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

On a vu que la série de fonctions converge normalement et donc uniformément sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.

Comme il s'agit d'une série de fonctions continues sur $]1, +\infty[$, on obtient que f est continue sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 1$ et ainsi f est continue sur $]1, +\infty[$.

La monotonie de f est évidente : si $1 < x < y$, on a pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^y} < \frac{1}{n^x}$ et ainsi en sommant $f(x) < f(y)$ (pourquoi $<$? ne pas oublier qu'une somme infinie est une limite et que le passage à la limite peut transformer une inégalité stricte en large, d'où la question : pourquoi $<$?) : si on avait $f(x) = f(y)$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{n^y} - \frac{1}{n^x}}_{>0} = 0$, ce qui est absurde. Ainsi f est une fonction décroissante strictement.

Étudions maintenant la dérivabilité de f : nous avons une série de fonctions $\sum f_n$ qui converge simplement sur $]1, +\infty[$, avec pour tout $n \geq 1$, f_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$, avec

$$f'_n(x) = (n^{-x})' = (e^{-x \ln n})' = -\frac{\ln n}{n^x}$$

On étudie la convergence de la série des dérivées $\sum_{n \geq 1} f'_n$; on se place sur $[a, +\infty[$ avec $a > 1$ (pour la même raison que l'étude de la série $\sum f_n$). On a

$$\|f'_n\|_\infty = \frac{\ln n}{n^a}$$

Or la série numérique $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ est convergente : en effet, en prenant $1 < b < a$, on a puisque $a - b > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^b \frac{\ln n}{n^a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^{a-b}} = 0$$

d'où le résultat par comparaison à une série de Riemann.

Ainsi la série des dérivées est normalement convergente, donc uniformément convergente, sur $[a, +\infty[$. On en déduit que la fonction ζ de Riemann est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a, +\infty[$, puis alors sur $]1, +\infty[$ et que l'on a

$$\forall x > 1, \zeta'(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \right)' = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} = - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}$$

Comme on obtient que $\zeta' < 0$, on retrouve le fait que la fonction ζ est strictement décroissante.

On montrerait de même, en appliquant le théorème généralisé, que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x > 1, \zeta^{(p)}(x) = (-1)^p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^p}{n^x}$$

(lorsque $p \geq 1$, on peut supprimer de la somme le terme associé à $n = 1$).

PROPOSITION 19. *La fonction ζ admet 1 comme limite en $+\infty$.*

Preuve :

- Utilisation du théorème de la double limite (programme officiel).
- Une question se pose tout de même : peut-on obtenir la limite 1 directement, sans le théorème de la double limite, de façon élémentaire, mais sans doute avec des astuces de calculs et raisonnements ?

On donne ici une méthodologie. On n'utilise pas donc le théorème de la double limite. On écrit si $x > 1$, en mettant déjà la premier terme à part (c'est la limite supputée)

$$\zeta(x) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots +$$

et ainsi

$$0 \leq \zeta(x) - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots +$$

L'idée est de majorer, par une quantité qui tendra vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. On va faire apparaître une somme géométrique :

$$\frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} \leq \frac{2}{2^x} = \frac{1}{2^{x-1}}$$

et

$$\frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} \leq \frac{4}{4^x} = \frac{1}{4^{x-1}} = \left[\frac{1}{2^{x-1}} \right]^2$$

et de façon générale

$$\sum_{k=0}^{2^p-1} \frac{1}{(2^p+k)^x} \leq \frac{2^p}{(2^p)^x} = \left[\frac{1}{2^{x-1}} \right]^p$$

et ainsi pour les sommes partielles d'ordre $2^N - 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{2^N-1} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{p=1}^N \left[\frac{1}{2^{x-1}} \right]^p = \frac{1}{2^{x-1}} \times \frac{1 - \left[\frac{1}{2^{x-1}} \right]^N}{1 - \frac{1}{2^{x-1}}}$$

et en faisant tendre N vers $+\infty$, nous obtenons

$$0 \leq \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{2^{x-1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{x-1}}}$$

et ainsi en passant à la limite lorsque x tend vers $+\infty$, nous avons $\zeta(x)$ qui tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

Évidemment, on préférera ici la méthode de la double limite, c'est clair ?! ★

PROPOSITION 20. La fonction ζ admet $+\infty$ comme limite en 1^+ .

Preuve :

Nous ne pouvons pas appliquer le théorème de la double limite en 1 car nous ne disposons pas de la convergence uniforme au voisinage de 1 : la convergence normale est fautive puisque $\|f_n\|_{\infty, [1, a]} = \frac{1}{n}$, et la non convergence uniforme est fautive aussi, mais ce n'est pas facile à établir⁹.

(Intuitivement, la double limite nous donnerait de façon donc frauduleuse

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Frauduleux, mais on peut intuitiver que $L = +\infty$.)

On raisonne alors par l'absurde. Si on avait $L < +\infty$ (limite finie), alors on pourrait écrire si $x > 1$,

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq L$$

puis pour tout entier N non nul, la somme partielle étant inférieure à la somme complète

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq L$$

Alors nous faisons tendre x vers 1, ce qui est autorisé dans une somme finie

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq L$$

et ainsi les sommes partielles de la série harmonique seraient majorées par L , et donc la série harmonique serait convergente, ce qui est contradictoire.

9. on va le prouver en fait, mais par la négation de l'application du théorème de la double limite

On a donc $L = +\infty$ forcément.

Maintenant, on peut en fait en déduire la non convergence uniforme sur $]1, a]$ avec $a > 1$. En effet, si la convergence était uniforme, comme on a pour tout entier n non nul

$$\frac{1}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ell = \frac{1}{n}$$

on pourrait appliquer le théorème de la double limite, et on aurait que la série $\sum \ell_n$, c'est à dire la série harmonique, qui serait convergente, ce qui est absurde. Donc la convergence n'est pas uniforme sur $]1, a]$ (donc sur aucun voisinage de 1).

Nous avons montré ici que le théorème de la double limite peut permettre de déduire une non convergence uniforme (mais il a tout de même fallu étudier L de façon élémentaire astucieuse).

On remarquera que la méthode donnée ici fonctionne par le fait que la série soit à termes positifs.

★

• La fonction η est définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

On a vu que la série de fonctions converge uniformément sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Comme il s'agit d'une série de fonctions continues sur $]0, +\infty[$, on obtient que f est continue sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ et ainsi f est continue sur $]0, +\infty[$.

La monotonie de f n'est pas évidente ! Cela à cause du caractère oscillant de la série.

Étudions maintenant la dérivabilité de f : nous avons une série de fonctions $\sum f_n$ qui converge simplement sur $]0, +\infty[$, avec pour tout $n \geq 1$, f_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, avec

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$$

La convergence normale ne fonctionne que sur $[a, +\infty[$ avec $a > 1$ (comme ci-dessus). Cela n'est pas satisfaisant. On se place sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. La série numérique $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$ est une série alternée ; le terme général, en valeur absolue est

$$\frac{\ln n}{n^x}$$

Posons $\theta_x(u) = \frac{\ln u}{u^x}$ sur $[1, +\infty[$. On a

$$\theta'_x(u) = \frac{u^{x-1} - x \ln u u^{x-1}}{u^{2x}} = \frac{1 - x \ln u}{u^{x+1}} \leq \frac{1 - a \ln u}{u^{x+1}}$$

Il existe $N_0 \geq 1$, à partir duquel que $1 - a \ln n < 0$; on peut alors appliquer le critère spécial des séries alternées pour toutes les séries numériques $\sum_{k \geq n}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k^x}$: on a la majoration uniforme des restes à partir du rang N_0

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k^x} \right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$$

ce qui permet de montrer la convergence uniforme de la série des dérivées sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. On en déduit alors que la fonction η est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x > 0, \eta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$$

On montrerait de même, en appliquant le théorème généralisé, que η est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x > 1, \eta^{(p)}(x) = (-1)^p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (\ln n)^p}{n^x}$$

(lorsque $p \geq 1$, on peut supprimer de la somme le terme associé à $n = 1$).

PROPOSITION 21. *La fonction η admet 1 comme limite en $+\infty$.*

Preuve :

On applique le théorème de la double liite, la convergence étant uniforme sur $[1, +\infty[$ par exemple.

★

IV Non dérivabilité de la fonction de Weierstrass

On considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec pour tout x réel

$$f_n(x) = a^n \cos(b^n \pi x)$$

avec $0 < a < 1$ et $b > 0$.

Nous avons une séries de fonctions continues. De plus comme pour tout x ,

$$|f_n(x)| \leq a^n$$

on en déduit que $\|f_n\|_\infty \leq a^n$ et ainsi comme la série numérique $\sum a^n$ est convergente, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée $\mathcal{W}$, qui est alors une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Nous allons montrer que la fonction $f = \mathcal{W}$ n'est dérivable en aucun point, avec b choisit convenablement¹⁰.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé pour toute la suite, on a

$$\theta_x(h) = \frac{\mathcal{W}(x+h) - \mathcal{W}(x)}{h} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \frac{\cos(b^n \pi x + b^n \pi h) - \cos(b^n \pi x)}{h}$$

On suppose $b > 1$ et b entier pair de sorte que $h_p = \frac{1}{b^p}$ tende vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$, alors la somme va devenir finie puisque lorsque $n \geq p+1$,

$$\cos(b^n \pi x + b^n \pi h_p) = \cos(b^n \pi x + b^{n-p} \pi) = \cos(b^n \pi x)$$

$$\begin{aligned} \theta_x(h_p) &= \sum_{n=0}^p a^n b^p [\cos(b^n \pi x + b^{n-p} \pi) - \cos(b^n \pi x)] \\ &= \sum_{n=0}^{p-1} a^n b^p [\cos(b^n \pi x + b^{n-p} \pi) - \cos(b^n \pi x)] + a^p b^p [\cos(b^n \pi x + \pi) - \cos(b^n \pi x)] \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{p-1} a^n b^p [\cos(b^n \pi x + b^{n-p} \pi) - \cos(b^n \pi x)]}_{=S_{p-1}} - 2a^p b^p \cos(b^n \pi x) \end{aligned}$$

On majore S_{p-1} , en valeur absolue en utilisant

$$\cos(b^n \pi x + b^{n-p} \pi) - \cos(b^n \pi x) = -2 \sin\left(b^n \pi + \frac{1}{2} b^{n-p} \pi\right) \sin\left(\frac{1}{2} b^{n-p} \pi\right)$$

On suppose alors $ab > 1 + 2\pi$, $ab - 1 > 2\pi$,

10. source : Denis Monasse

$$\begin{aligned}
|S_{p-1}| &\leq 2 \sum_{n=0}^{p-1} a^n b^p \left| \sin \left(\frac{1}{2} b^{n-p} \pi \right) \right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{p-1} a^n b^p b^{n-p} \pi \\
&\leq \pi \sum_{n=0}^{p-1} (ab)^n = \pi \frac{(ab)^p - 1}{ab - 1} \\
&< \pi \frac{(ab)^p}{ab - 1} < \frac{1}{2} (ab)^p
\end{aligned}$$

On écrit alors $S_{p-1} = \varepsilon_p b^p a^p$, avec $|\varepsilon_p| < \frac{1}{2}$. Finalement

$$\frac{f(x + h_p) - f(x)}{h_p} = a^p b^p (\varepsilon_p - 2 \cos(b^p \pi x))$$

De la même façon on obtient

$$\frac{f\left(x + \frac{h_p}{2}\right) - f(x)}{\frac{h_p}{2}} = a^p b^p \left(\eta_p - 2\sqrt{2} \sin\left(b^p \pi x + \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

avec $|\eta_p| < \frac{1}{2}$. En effet

$$\theta_x\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{\mathcal{W}\left(x + \frac{h}{2}\right) - \mathcal{W}(x)}{\frac{h}{2}} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \frac{\cos(b^n \pi x + b^n \pi \frac{h}{2}) - \cos(b^n \pi x)}{h}$$

Lorsque $n \geq p + 1$,

$$\cos\left(b^n \pi x + b^n \pi \frac{h_p}{2}\right) = \cos\left(b^n \pi x + b^{n-p} \frac{\pi}{2}\right) = \cos(b^n \pi x)$$

puisque b^{n-p} multiple de 4 en prenant désormais b multiple de 4

$$\begin{aligned}
\theta_x(h_p) &= 2 \sum_{n=0}^p a^n b^p \left[\cos\left(b^n \pi x + b^{n-p} \frac{\pi}{2}\right) - \cos(b^n \pi x) \right] \\
&= 2 \sum_{n=0}^{p-1} a^n b^p \left[\cos\left(b^n \pi x + b^{n-p} \frac{\pi}{2}\right) - \cos(b^n \pi x) \right] + 2a^p b^p \left[\cos\left(b^n \pi x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos(b^n \pi x) \right] \\
&= 2 \sum_{n=0}^{p-1} a^n b^p \left[\cos\left(b^n \pi x + b^{n-p} \frac{\pi}{2}\right) - \cos(b^n \pi x) \right] - 4a^p b^p \sin\left(b^n \pi x + \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4} \\
&= \underbrace{2 \sum_{n=0}^{p-1} a^n b^p \left[\cos\left(b^n \pi x + b^{n-p} \frac{\pi}{2}\right) - \cos(b^n \pi x) \right]}_{=S_{p-1}} - 2\sqrt{2} a^p b^p \sin\left(b^n \pi x + \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

On majore S_{p-1} , en valeur absolue en utilisant

$$\cos(b^n \pi x + b^{n-p} \pi) - \cos\left(b^n \pi \frac{x}{2}\right) = -2 \sin\left(b^n \pi + \frac{1}{4} b^{n-p} \pi\right) \sin\left(\frac{1}{4} b^{n-p} \pi\right)$$

$$\begin{aligned}
|S_{p-1}| &\leq 4 \sum_{n=0}^{p-1} a^n b^p \left| \sin \left(\frac{1}{4} b^{n-p} \pi \right) \right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{p-1} a^n b^p b^{n-p} \pi \\
&\leq \pi \sum_{n=0}^{p-1} (ab)^n = \pi \frac{(ab)^p - 1}{ab - 1} \\
&< \pi \frac{(ab)^p}{ab - 1} < \frac{1}{2} (ab)^p
\end{aligned}$$

On écrit alors $S_{p-1} = \varepsilon_p b^p a^p$, avec $|\eta_p| < \frac{1}{2}$. Finalement

$$\frac{f(x + h_p) - f(x)}{h_p} = a^p b^p \left(\eta_p - 2\sqrt{2} \sin \left(b^p \pi x + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

LEMME 1. Une des deux quantité $\sin \left(u + \frac{\pi}{4} \right)$ ou $\cos(u)$ prend, en valeur absolue, une valeur supérieure à $\sin \frac{\pi}{8}$.

Preuve :

En effet, on écrit

$$\begin{aligned}
\sin^2 \left(u + \frac{\pi}{4} \right) + \cos^2(u) &= \frac{1 - \cos \left(2u + \frac{\pi}{2} \right)}{2} + \frac{1 + \cos(2u)}{2} = 1 + \frac{1}{2}(\sin(2u) + \cos(2u)) \\
&= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(2u + \frac{\pi}{4} \right) \\
&\geq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Alors l'une des deux valeurs au carré est forcément supérieure ou égale à $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ ★

Ainsi la quantité

$$\frac{f(x + u) - f(u)}{u}$$

peut prendre des valeurs aussi grande que l'on veut pour des valeurs u proche de 0 ; ceci contredit l'existence d'une tangente en x . Donc f n'est pas dérivable en x .

V Exercices

A Convergence simple d'une suite de fonctions

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx}$$

2. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \frac{\ln(1 + nx)}{1 + nx}$$

3. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 2}$ définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} x\sqrt{n} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}[\\ \frac{n(x-1)}{1-n\sqrt{n}} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

4. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^n(1 - x)^n$$

5. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$f_n(x) = (\sin x)^n$$

6. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^{2n} - 2}{(\ln x)^{2n} + 2}$$

7. Soit (f_n) une suite de fonctions toutes monotones de même sens convergeant simplement vers la fonction f sur un intervalle I . Montrer que la fonction f est monotone.

B Convergence uniforme d'une suite de fonctions

8. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = x^2 e^{-nx}$$

9. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ -2n^2 (x - \frac{1}{n}) & \text{si } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

On pourra calculer $\int_0^1 f_n(x) dx$.

Étudier la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

10. On considère pour $n \geq 1$ la fonction f_n définie par $f_n(0) = 0$ et si $x \neq 0$

$$f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{nx}$$

Montrer que f_n est bornée. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) .

11. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = nx e^{-nx} \sin x$$

12. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \cos(x) \sin^n(x)$

13. On considère la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = x + \frac{1}{n}$$

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément. Étudier les modes de convergence de (f_n^2) .

14. On pose sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,

$$f_n(x) = n \sin(x) \cos^n(x)$$

- 1) Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n) .
- 2) Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$$

La convergence est-elle uniforme ?

- 3) Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $]0, \frac{\pi}{2}]$.

15. Soit f_n définie pour $n \neq 0$ sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \inf \left(n, \frac{x^n}{n} \right)$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette suite de fonctions.

16. Étudier le plus précisément possible la convergence de la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x^2}}$$

17. On considère la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(0) = 0$ et pour $x \neq 0$

$$f_n(x) = x^2 \sin \left(\frac{1}{nx} \right)$$

Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[-a, a]$ avec $a > 0$.

18. (*) Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément vers des fonctions f et g supposées bornées. Montrer que la suite de fonctions $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg .
19. (****) Soit (P_n) une suite de fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que (P_n) converge uniformément vers une fonction f . Montrer que la fonction f est une fonction polynomiale.
20. Soit (f_n) une suite de fonctions bornées qui converge uniformément vers une fonction f sur I . Montrer que f est aussi bornée.

C Séries de fonctions

21. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose sur $[0, 1]$, $u_n(x) = x^n(1 - x)$.
1) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ et préciser la fonction somme.
2) La convergence est-elle uniforme ?

22. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$$

est simplement convergente sur $] - 1, 1[$, normalement convergente sur tout segment de $] - 1, 1[$. Est-elle normalement convergente sur $] - 1, 1[$?

23. Montrer que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos^n x \sin(nx)$$

définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$.

Montrer que $f' = -1$ et en déduire f .

24. Montrer que

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$$

définit une fonction continue sur $[0, +\infty[$. Préciser la limite de S en $+\infty$. Montrer aussi que S est strictement décroissante.

25. Montrer que

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{\frac{5}{2}}}$$

définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Préciser $f'(x)$ pour tout x réel.

26. Montrer que la fonction réelle S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que S est continue sur $]1, +\infty[$ puis sur $]0, +\infty[$.

27. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, strictement décroissante.

28. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose sur $[0, 1]$, $u_n(x) = x^n(1 - x)^2$.

1) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ et préciser la fonction somme.

2) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

3) En déduire que

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

29. On pose pour $x \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \cdot 1$) Montrer que $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ définit une fonction continue; préciser la limite de S en $+\infty$.
 2) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
 3) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0, S''(x) + S(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

30. Montrer que $\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$ définit une fonction continue sur $[0, 1]$ et calculer

$$\int_0^1 \psi(x) dx$$

31. Montrer que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{Arctan}(nx)$$

définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

32. Montrer que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \sqrt{n+x} - \operatorname{Arctan} \sqrt{n}$$

définit une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$.

33. Sommes partielles : le retour. Soit $b > 0$.

- 1) Justifier l'existence de $\int_0^1 \frac{1}{1+t^b} dt$.
- 2) Justifier l'existence de $\int_0^1 t^{nb} dt$ pour tout entier n et calculer ces intégrales.
- 3) On souhaite montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nb}$$

Peut-on obtenir le résultat par le théorème d'interversion limite-intégrale?
 Montrer l'égalité ci-dessus en se ramenant aux sommes partielles.

VI Exercices corrigés

A Suites de fonctions

Exercice 1.

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx}$$

☞ Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

- si $x = 0$, $f_n(x) = 0$ et donc la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers 0.
 - si $x > 0$, on a $f_n(x) \sim \frac{x}{nx} = \frac{1}{n}$ et ainsi la suite $(f_n(x))$ converge aussi vers 0.
- Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

Exercice 2.

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \frac{\ln(1 + nx)}{1 + nx}$$

☞ Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

- si $x = 0$, $f_n(x) = 0$ et donc la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers 0.
- si $x > 0$, on a la suite $(1 + nx)$ qui diverge vers $+\infty$, et on sait que $\frac{\ln(u)}{u}$ tend vers 0 en $+\infty$ et ainsi la suite $(f_n(x))$ converge aussi vers 0.

Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

Exercice 3.

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 2}$ définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} x\sqrt{n} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}[\\ \frac{n(x-1)}{1-n\sqrt{n}} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

☞ Pour $n \geq 2$, $n\sqrt{n} > 1$, et donc la suite de fonctions est bien définie.

Soit $x \in [0, 1]$.

- si $x = 0$, $f_n(x) = 0$ et ainsi la suite $(f_n(0))$ converge vers 0.
- si $x = 1$, $f_n(1) = 0$ et ainsi la suite $(f_n(1))$ converge vers 0.
- si $x \in]0, 1[$, à partir d'un certain rang, on a $\frac{1}{n} < x$ et ainsi à partir de ce rang, on a

$$f_n(x) = \frac{n(x-1)}{1-n\sqrt{n}} \sim \frac{1-x}{\sqrt{n}}$$

et ainsi $(f_n(x))$ converge vers 0.

Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.

Exercice 4.

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^n(1-x)^n$$

☞ Soit $x \in \mathbb{R}$, on remarque que

$$f_n(x) = [x(1-x)]^n$$

On pose alors $u = \theta(x) = x(1-x)$, $\theta'(x) = 1-2x$, d'où les variations de θ :

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$\theta'(x)$		+	0	-	
θ	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		∞

On a

$$\begin{aligned} g(x) = -1 &\iff x - x^2 = 1 \iff x^2 - x - 1 = 0 \\ &\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- si $x \in \left] \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right[$, $|u| < 1$ et ainsi la suite $(f_n(x))$ converge vers 0.

- si $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, la suite $(f_n(x)) = ((-1)^n)$ diverge.

- sinon, $|u| > 1$ et la suite $(f_n(x))$ diverge.

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\left] \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right[$ vers la fonction nulle.

Exercice 5.

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f_n(x) = (\sin x)^n$$

☞ Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- si $x < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \sin(x) < 1$ et ainsi la suite $(f_n(x))$ converge vers 0.

- si $x = \frac{\pi}{2}$, $f_n(x) = 1$ et ainsi la suite $(f_n(x))$ converge vers 1.

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Exercice 6.

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^{2n} - 2}{(\ln x)^{2n} + 2}$$

☞ Soit $x > 0$, on distingue plusieurs cas :

- si $x \in]\frac{1}{e}, e[$, alors $\ln x \in]-1, 1[$, et ainsi $((\ln x)^n)$ converge vers 0, et $(f_n(x))$ converge vers -1.
- si $x = \frac{1}{e}$ ou $x = e$, $(\ln x)^2 = 1$ et ainsi $f_n(x) = -\frac{1}{3}$ et donc $(f_n(x))$ converge vers $-\frac{1}{3}$.
- sinon, $(\ln x)^2 > 1$ et alors comme $((\ln x)^{2n})$ diverge vers $+\infty$, on a

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^{2n} - 2}{(\ln x)^{2n} + 2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln x)^{2n}}{(\ln x)^{2n}} = 1$$

et ainsi $(f_n(x))$ converge vers 1.

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]\frac{1}{e}, e[\\ -\frac{1}{3} & \text{si } x = \frac{1}{e} \text{ ou } x = e \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 7.

Soit (f_n) une suite de fonctions toutes monotones de même sens convergeant simplement vers la fonction f sur un intervalle I . Montrer que la fonction f est monotone.

☞ On suppose que les fonctions sont toutes croissantes par exemple. Montrons que la limite simple est croissante. Soit $x \leq y$, on a $(f_n(x))$ qui converge vers $f(x)$ et $(f_n(y))$ vers $f(y)$. Or comme f_n est croissante, on a $f_n(x) \leq f_n(y)$ et ainsi en passant à la limite dans l'inégalité on a $f(x) \leq f(y)$. Donc f est bien croissante.

B Convergence uniforme d'une suite de fonctions**Exercice 8.**

Étudier la convergence uniforme des suites de fonctions précédentes.

☞ À vos crayons !

Exercice 9.

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = x^2 e^{-nx}$$

☞ Pour $x = 0$, $(f_n(0)) = (0)$ converge vers 0.

Si $x > 0$, $(f_n(x))$ converge vers 0 aussi.

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

L'étude de fonction de f_n conduit à

$$\|f_n\|_\infty = \frac{4}{en}$$

et ainsi la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 10.

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ -2n^2 (x - \frac{1}{n}) & \text{si } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

On pourra calculer $\int_0^1 f_n(x) dx$.

Étudier la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

☞ Pour la convergence simple, de façon classique désormais :

– si $x > 0$, à partir d'un certain rang on a $x > \frac{1}{n}$ et donc $f_n(x) = 0$ et ainsi la suite $(f_n(x))$ converge vers 0.

– si $x = 0$, $(f_n(0)) = (0)$ qui converge vers 0.

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f nulle sur $\mathbb{R}^+$.

Or on a comme surface d'un triangle

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{n} \times 2n = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

et donc la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$ (car sinon, les fonctions f_n étant bien continues, on devrait avoir comme limite 0) et donc à fortiori non plus sur $\mathbb{R}^+$.

Par contre, si on s'écarte de 0, sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$, à partir d'un certain rang, on a $\frac{1}{n} < a$, et donc $f_n = 0$ sur $[a, +\infty[$, et toujours à partir de ce rang, $\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = 0$ et ainsi la suite $(\|f_n - f\|_{\infty, [a, +\infty[})$ converge vers 0, d'où la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

Exercice 11.

On considère pour $n \geq 1$ la fonction f_n définie par $f_n(0) = 0$ et si $x \neq 0$

$$f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{nx}$$

Montrer que f_n est bornée. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) .

☞ La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^*$, et en 0 on a $f_n(x) \underset{0}{\sim} nx$ et ainsi f_n est continue en 0. Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \neq 0$, on écrit comme $|\sin x| \leq |x|$

$$\left| \frac{\sin^2(nx)}{nx} \right| \leq \left| \frac{\sin(nx)}{nx} \times \sin(nx) \right| \leq 1$$

et ainsi les fonctions f_n sont bornées par 1.

Pour $x = 0$, $(f_n(x)) = (0)$ converge vers 0.

Pour $n \neq 0$, on a

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n|x|}$$

et ainsi $(f_n(x))$ converge vers 0.

Donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

On obtient facilement la convergence uniforme vers 0 sur un domaine $] -\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ avec $a > 0$: on a la majoration uniforme

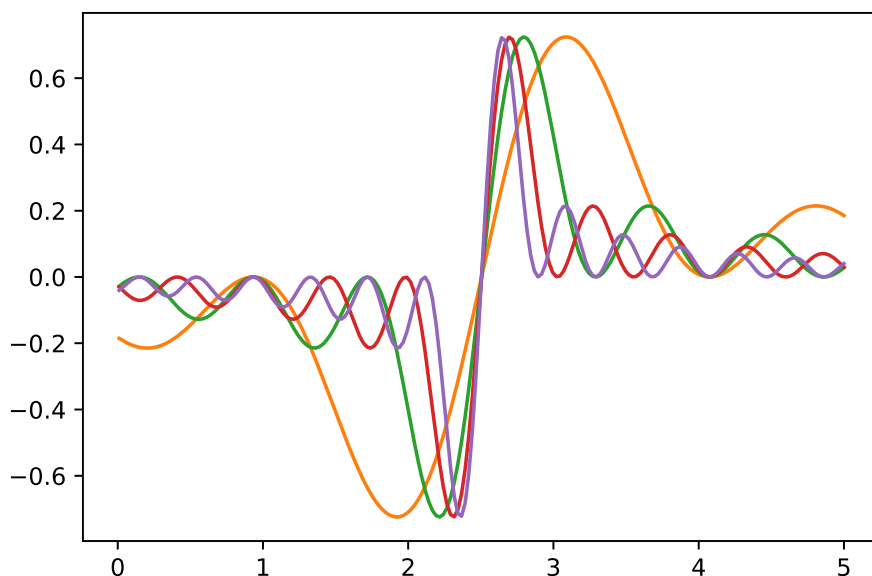
$$\forall x, |x| \geq a \implies |f_n(x)| \leq \frac{1}{na}$$

Ainsi il y a convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}^*$.

Sur $\mathbb{R}$, il n'y a pas convergence uniforme : en effet

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \sin^2 1$$

et ainsi $M_n = \|f_n\|_\infty$ ne converge pas vers 0.



Exercice 12.

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = nxe^{-nx} \sin x$$

☞ Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

- si $x = 0$, $(f_n(x)) = (0)$ qui converge vers 0.
- si $x > 0$, on a

$$|f_n(x)| \leq xne^{-nx}$$

et ainsi $(f_n(x))$ converge vers 0, par comparaison de n avec e^{-nx} lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

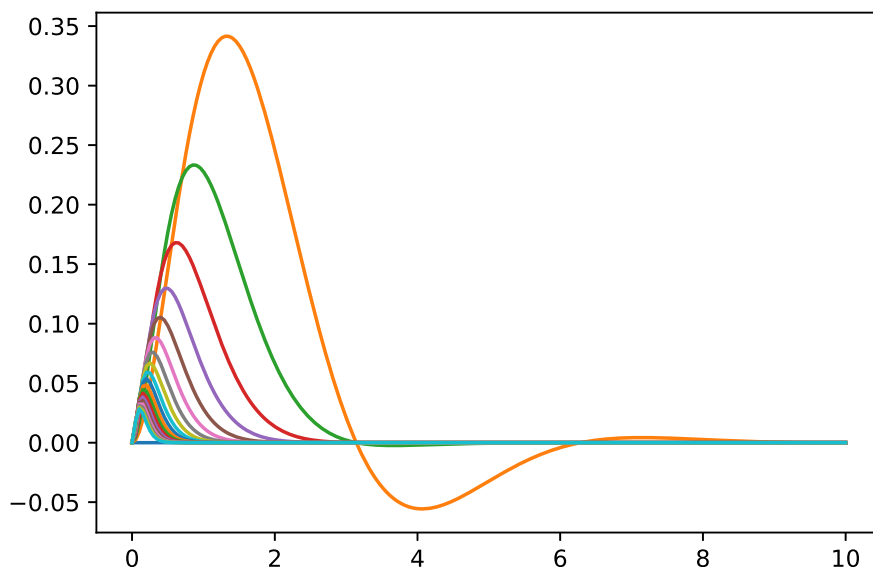
Les variations de la fonction f_n sont complexes (possibles tout de même). On remarque que

$$|f_n(x)| \leq x^2 ne^{-nx}$$

puisque $\sin(x) \leq x$ (on ne majore pas le sinus par 1 pour préserver le comportement en 0 qui est en fait l'endroit important, comme on peut le voir sur les courbes) et on étudie g_n définie par $g_n(x) = nx^2 e^{-nx}$. On a

$$g'_n(x) = n[2xe^{-nx} - nx^2 e^{-nx}] = nxe^{-nx}(2 - nx)$$

On en déduit que $\|g_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} = g_n(2/n) = \frac{4}{e^2 n}$, et ainsi $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.



Exercice 13.

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \cos(x) \sin^n(x)$

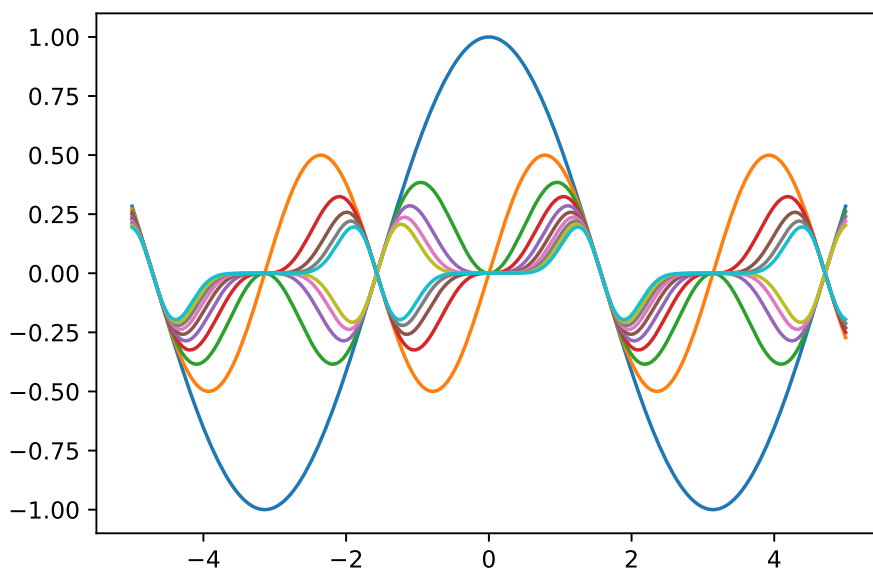
☞ Nous avons la 2π périodicité. On se place sur $[0, 2\pi]$.

Si $x \in [0, 2\pi] \setminus \{\pi/2, 3\pi/2\}$, $|\sin(x)| < 1$ et donc la suite $(f_n(x))$ converge vers 0.

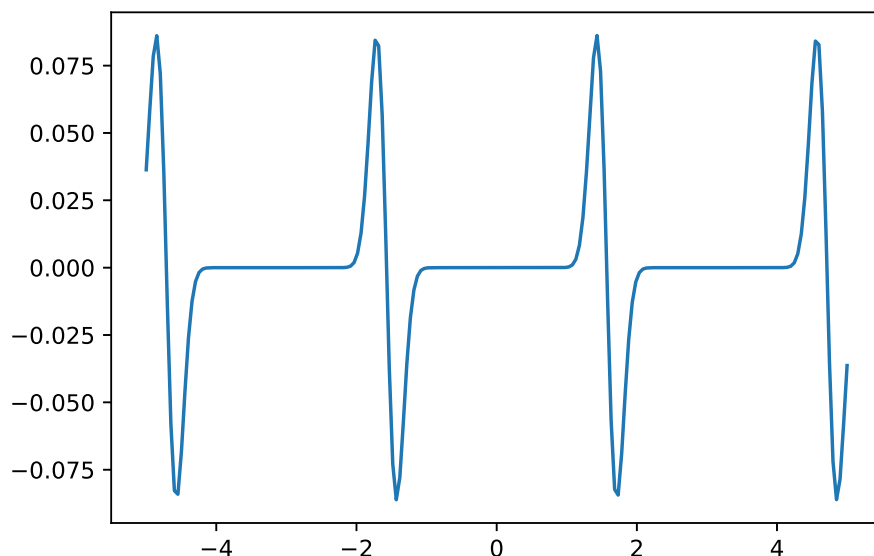
Sinon, $\cos(x) = 0$, et $(f_n(x)) = (0)$ qui converge vers 0.

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Les premières courbes :



et la fonction f_{49} :



La convergence semble tout de même uniforme (les pics semblent de plus en plus bas). On tente les variations de f_n :

$$f'_n(x) = -\sin^{n+1}(x) + n \cos(x)^2 \sin^{n-1}(x) = \sin^{n-1}(x)[n \cos^2(x) - \sin^2(x)] = \sin^{n-1}(x)[(n+1) \cos^2(x) - 1]$$

On obtient alors

$$\|f_n\|_\infty = f_n(a_n)$$

avec $a_n = \arccos \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, et ainsi

$$\begin{aligned} \|f_n\|_\infty &= f_n(a_n) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \times \left[\sin \arccos \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right]^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \times \left[1 - \frac{1}{n+1} \right]^{\frac{n}{2}} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{n}{2} \ln \frac{n}{n+1}} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{n}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{n}{2} \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{en}} \end{aligned}$$

ce qui permet de justifier la convergence uniforme.

Exercice 14.

On considère la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = x + \frac{1}{n}$$

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément.
Étudier les modes de convergence de (f_n^2) .

☞ Nous avons si $x \in \mathbb{R}^+$, $(f_n(x))$ qui converge vers x et ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction identité sur $\mathbb{R}^+$. De plus

$$|f_n(x) - x| = \frac{1}{n}$$

et ainsi $\|f_n - \text{id}\|_{\infty, \mathbb{R}^+} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ et donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction identité sur $\mathbb{R}^+$.

La suite de fonctions (f_n^2) converge simplement vers la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$. La convergence est-elle uniforme ? On a

$$f_n^2(x) - x^2 = \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}$$

et ainsi $f_n^2 - \text{id}^2$ n'est pas bornée, il n'y aura pas convergence uniforme, sur $\mathbb{R}^+$.

Sur $[a, a]$ par contre, avec $a > 0$, nous avons

$$\|f_n^2 - \text{id}^2\|_{\infty, [0, a]} = \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2}$$

qui converge vers 0, et ainsi il y a convergence uniforme sur $[0, a]$ (et alors sur tout segment de $\mathbb{R}^+$).

Exercice 15.

On pose sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,

$$f_n(x) = n \sin x \cos^n x$$

1) Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n) .

2) Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$$

La convergence est-elle uniforme ?

3) Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $]0, \frac{\pi}{2}]$.

☞ 1) Si $x \in [0, \pi/2[$, $|\cos(x)| < 1$ et donc la suite $(f_n(x))$ converge vers 0, $\sin^n(x)$ l'emportant sur n .
Sinon, $\sin(x) = 0$, et $(f_n(x)) = (0)$ qui converge vers 0.

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, \pi/2]$.

2) On a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx = n \left[-\frac{1}{n+1} \cos^{n+1}(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \neq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx = 0$$

et ainsi la convergence ne peut pas être uniforme sur le segment $[0, \pi/2]$ (les fonctions f_n étant continues).

3) On se place sur $[a, \pi/2]$, avec $0 < a < \pi/2$. Alors

$$|f_n(x)| \leq n \cos^n(a)$$

et ainsi $\|f_n - 0\|_{\infty, [a, \pi/2]} \rightarrow 0$ et donc nous avons la convergence uniforme.

Exercice 16.

Soit f_n définie pour $n \neq 0$ sur $\mathbb{R}$ par

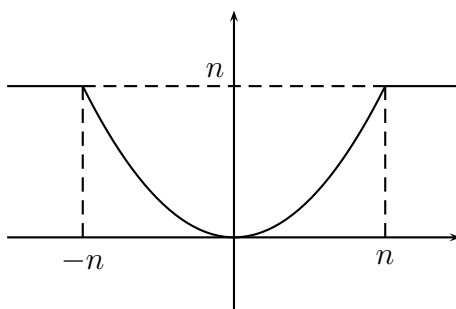
$$f_n(x) = \inf \left(n, \frac{x^n}{n} \right)$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette suite de fonctions.

☞ On a

$$\frac{x}{n} \leq n \iff x^2 \leq n^2 \iff x \in [-n, n]$$

et ainsi on obtient la courbe de f_n :



Montrons que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers 0. Soit $a \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\frac{a^2}{n}\right)$ convergeant vers 0, il existe un rang N_0 à partir duquel

$$\inf \left(n, \frac{a^2}{n} \right) = \frac{a^2}{n}$$

et ainsi $(f_n(a))$ converge vers 0.

On obtient la convergence uniforme sur tout segment, que l'on prend de la forme $[-A, A]$ sans perdre en généralité (tout segment de $\mathbb{R}$ est contenu dans un segment de la forme $[-A, A]$) si N est supérieur à A , alors pour tout x de $[-A, A]$, on a

$$f_n(x) = \inf \left(n, \frac{x^2}{n} \right) = \frac{x^2}{n} \leq \frac{A^2}{n}$$

d'où la convergence uniforme vers la fonction nulle de (f_n) sur $[-A, A]$.

Par contre, nous n'avons pas la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ puisque $M_n = \|f_n\|_\infty = n$.

Exercice 17.

Étudier le plus précisément possible la convergence de la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x^2}}$$

☞ On a $e^{-x^2} = 1$ si et seulement si $x = 0$. Or $e^u - 1 \sim_0 u$ et ainsi

$$f_n(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} n$$

et on peut alors prolonger f_n par continuité en 0 par $f_n(0) = n$.

Si $x > 0$, on a $f_n(x)$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Si $x < 0$, $f_n(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$.

Comme $\|f_n\|_{\infty,]0, +\infty[} \geq n$ (puisque $f_n(0) = n$), nous n'avons pas la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$.

Si on s'écarte de 0, sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$, l'étude de f_n ne semble pas sympathique.

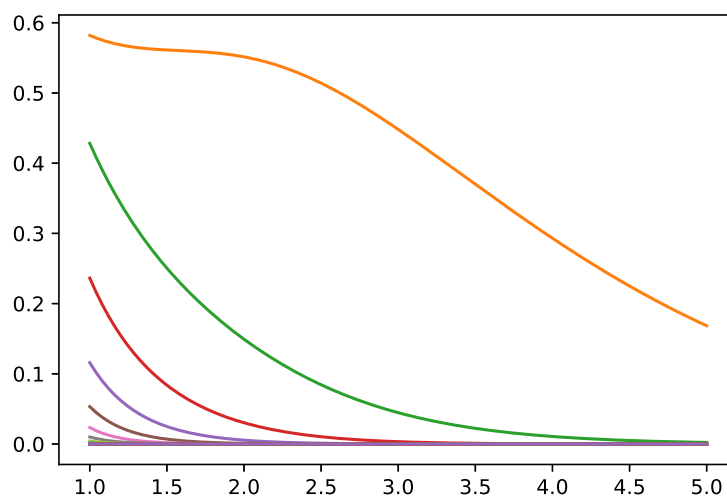
Si $x \geq a > 0$, $x^2 \geq a^2$, $e^{-x^2} \leq e^{-a^2}$, $1 - e^{-x^2} \geq 1 - e^{-a^2}$, et

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1 - e^{-a^2}} n x^2 e^{-nx}$$

La fonction $g_n : x \mapsto x^2 e^{-nx}$ présente une bosse, que l'on détermine :

$$g'_n(x) = e^{-nx}(2x - nx^2) = x(2 - nx)e^{-nx}$$

Ainsi $\|g_n\|_{\infty} = g_n(2/n) = \frac{4}{en^2}$, et ainsi $\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{1}{1 - e^{-a^2}} \times \frac{4}{n}$, et on obtient la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.



Exercice 18.

On considère la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(0) = 0$ et pour $x \neq 0$

$$f_n(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right)$$

Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[-a, a]$ avec $a > 0$.

☞ La suite $(f_n(0))$ converge vers 0.

Si $x \neq 0$, on a

$$f_n(x) = x^2 \sin \frac{1}{nx} \sim \frac{x^2}{nx} = \frac{x}{n} \rightarrow 0$$

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Or

$$f_n(n) = n^2 \sin(1)$$

qui ne tend pas vers 0, et donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Par contre, si on se place sur $[-a, a]$, on a sachant que $|\sin(x)| \leq |x|$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{x^2}{nx} = \frac{x}{n} \leq \frac{a}{n}$$

et ainsi $\|f_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq \frac{a}{n} \rightarrow 0$, et donc la convergence est uniforme sur $[-a, a]$.

Exercice 19.

Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément vers des fonctions f et g supposées bornées. Montrer que la suite de fonctions $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg .

☞ Soit x , on écrit si B_f est une borne de f ,

$$\begin{aligned} |(f_n g_n)(x) - (fg)(x)| &= |(f_n(x) - f(x))g_n(x) + f(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\ &= |(f_n(x) - f(x))g_n(x) + f(x)(g_n(x) - g(x))| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)||g_n(x)| + |f(x)||g_n(x) - g(x)| \\ &\leq M_n(f_n - f)|g_n(x)| + |f(x)|M_n(g_n - g) \\ &\leq M_n(f_n - f)|g_n(x)| + B_f M_n(g_n - g) \end{aligned}$$

Or comme (g_n) converge uniformément vers g , il existe un rang à partir duquel $\|g_n - g\| \leq 1$ et alors pour tout x , $|g_n(x) - g(x)| \leq 1$, et ainsi

$$|g_n(x)| \leq |g_n(x) - g(x)| + |g(x)|$$

et $\|g_n\| \leq 1 + B_g$, et alors toujours à partir de ce rang,

$$\|f_n g_n - fg\| \leq M_n(f_n - f)(1 + B_g) + B_f M_n(g_n - g)$$

qui tend vers 0. Ainsi $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg .

Exercice 20.

Soit (P_n) une suite de fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que (P_n) converge uniformément vers une fonction f . Montrer que la fonction f est une fonction polynomiale.

☞ • Si on se place sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, la convergence est encore uniforme, et comme les fonctions P_n sont continues, on obtient que f est continue.

• Pour $\varepsilon = 1 > 0$, il existe un rang N_0 à partir duquel pour tout x , $|P_n(x) - f(x)| \leq 1$. Alors, si $n \geq N_0$, on a pour tout x ,

$$|P_n(x) - P_{N_0}(x)| \leq |P_n(x) - f(x)| + |f(x) - P_{N_0}(x)| \leq 2$$

et ainsi $P_n - P_{N_0}$ est un polynôme borné, il est donc constant (classique) noté a_n . On a donc

$$\forall n \geq N_0, P_n = P_{N_0} + a_n$$

Pour x fixé,

$$a_n = P_n(x) - P_{N_0}(x) \longrightarrow f(x) - P_{N_0}(x)$$

et donc la suite $(a_n)_{n \geq N_0}$ converge vers a , et par unicité de la limite, on a

$$f(x) - P_{N_0}(x) = a$$

et ainsi $f(x) = P_{N_0}(x) + a$, soit $f = P_{N_0} + a$ qui est donc une fonction polynôme.

Exercice 21.

Soit (f_n) une suite de fonctions bornées sur I qui converge uniformément vers une fonction f sur I . Montrer que f est aussi bornée.

☞ Prenons $\varepsilon = 1$. Il existe un rang N à partir duquel pour tout x de I , $|f_n(x) - f(x)| \leq 1$. Alors

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq 1 + B_n$$

et ainsi la fonction f est bornée sur I .

C Séries de fonctions

Exercice 22.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose sur $[0, 1]$, $u_n(x) = x^n(1 - x)$.

1) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ et préciser la fonction somme.

2) La convergence est-elle uniforme ?

☞ 1) Si $x \in [0, 1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n(1 - x) = \frac{1}{1 - x} \times (1 - x) = 1$$

Si $x = 1$, $u_n(1) = 0$ et ainsi la série numérique $\sum u_n(1)$ converge de somme 0.

Ainsi la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 0$.

2) Comme les fonctions f_n sont toutes continues sur $[0, 1]$ mais que f ne l'est pas en 1, la convergence ne peut pas être uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 23.

Montrer que la série de fonctions de terme général f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$$

est simplement convergente sur $] -1, 1[$, normalement convergente sur tout segment de $] -1, 1[$. Est-elle normalement convergente sur $] -1, 1[$?

☞ Soit $x \in] -1, 1[$, la série numérique $\sum \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ est une série à termes strictement positifs. Comme

$$\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \sim x^{2n} = (x^2)^n$$

et que $x^2 < 1$, par comparaison par équivalent à une série géométrique convergente, la série numérique $\sum \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ est convergente.

Ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ est simplement convergente sur $] -1, 1[$; on ne précise pas la somme.

On se place sur le segment $[-a, a]$ avec $0 < a < 1$. On a si $x \in [-a, a]$

$$0 \leq f_n(x) \leq a^{2n} = (a^2)^n$$

Or la série numérique $\sum (a^2)^n$ est convergente, ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur le segment $[-a, a]$.

On peut ainsi en déduire la convergence normale sur tout segment de $] -1, 1[$, sachant que tout segment de $] -1, 1[$ est contenu dans un segment de la forme $[-a, a]$.

Étudions f_n sur $] -1, 1[$. f_n est paire, f_n est dérivable, et on a

$$f'_n(x) = \frac{2nx^{2n-1} \cdot (1+x^{2n}) - nx^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(1+x^{2n})^2} = \frac{x^{2n-1}(2n + nx^{2n})}{(1+x^{2n})^2}$$

et ainsi f_n croissante sur $[0, 1[$. Ainsi $\|f_n\|_{\infty,]-1, 1[} = f_n(1) = \frac{1}{2}$ et donc il n'y a pas convergence normale sur $] -1, 1[$.

Exercice 24.

Montrer que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos^n x \sin(nx)$$

définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$.

Montrer que $f' = -1$ et en déduire f .

☞ On pose $f_n(x) = \frac{1}{n} \cos^n x \sin(nx)$. Soit $x \in]0, \pi[$, $|\cos x| < 1$ et

$$|f_n(x)| \leq |\cos x|^n$$

et ainsi la série numérique $\sum f_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente. Ainsi la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, \pi[$.

(Sur $[a, \pi - a]$, avec $a > 0$ petit, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, on a la majoration uniforme

$$|f_n(x)| \leq |\cos a|^n$$

et ainsi la série de fonctions continues $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, \pi - a]$. On en déduit que f est continue sur $]0, \pi[$.)

Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$, et on a

$$f'_n(x) = -\cos^{n-1} x \sin x \sin(nx) + \cos^n x \cos(nx) = \cos^{n-1} x [-\sin x \sin(nx) + \cos x \cos(nx)] = \cos^{n-1} x \cos((n+1)x)$$

Sur $[a, \pi - a]$, avec $a > 0$ petit, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, on a la majoration uniforme

$$|f'_n(x)| \leq |\cos a|^{n-1}$$

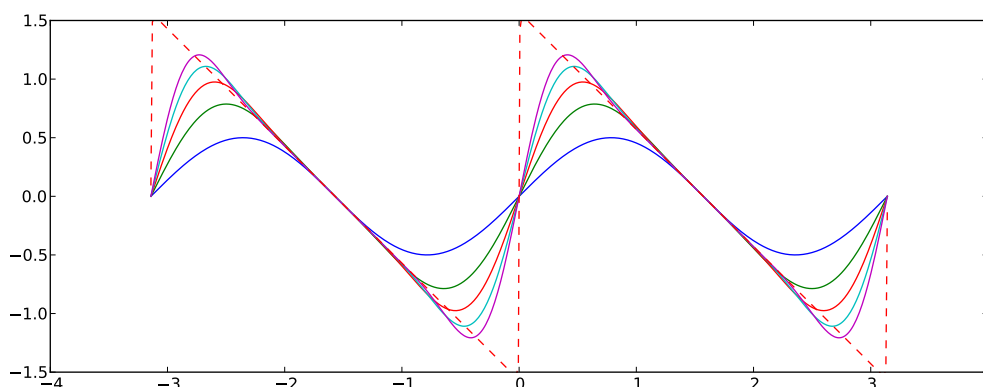
et ainsi la série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement sur tout $[a, \pi - a]$ et donc uniformément. On en déduit par le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$ et on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \cos^{n-1} x \cos((n+1)x) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \cos^{n-1} x \operatorname{Re}(e^{i(n+1)x}) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \cos^{n-1} x e^{i(n+1)x} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{2ix} \sum_{n=1}^{+\infty} (\cos x e^{ix})^{n-1} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{2ix} \frac{1}{1 - \cos x e^{ix}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{2ix} \frac{1 - \cos x e^{-ix}}{(1 - \cos^2 x)^2 + (\cos x \sin x)^2} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{e^{2ix} - \cos x e^{ix}}{\sin^4 x + \cos^2 x \sin^2 x} \right) \\ &= \frac{\cos 2x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{2 \cos^2 x - 1 - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin^2 x}{\sin^2 x} = -1 \end{aligned}$$

et ainsi $f' = -1$. On en déduit que $f(x) = -x + c$ sur $]0, \pi[$ puis comme

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - x \text{ sur }]0, \pi[.$$



Exercice 25.

Montrer que

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$$

définie une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

Préciser la limite de S en $+\infty$.

Montrer aussi que S est strictement décroissante.

☞ Si $x < 0$, $e^{\frac{-nx}{n^2}}$ ne tend pas vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$ et ainsi la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx}}{n^2}$ diverge grossièrement.

Pour $x \geq 1$, on a $0 \leq \frac{e^{-nx}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Ainsi comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, on en déduit que la série de fonctions, qui sont continues sur $[0, +\infty[$ converge normalement et donc uniformément sur $[0, +\infty[$. Ainsi la fonction somme S est une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

Par le théorème de la double limite. On a pour tout n non nul,

$$f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 = \ell_n$$

et on a la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$, et ainsi par le théorème de la double limite, $S(x)$ tend vers $\sum \ell_n = 0$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Autre : soit $x > 0$, on a

$$0 \leq S(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n^2} = e^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \alpha e^{-x}$$

ou encore

$$0 \leq S(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

et ainsi par encadrement, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$.

Si $x < y$, alors pour tout entier n non nul, $e^{-nx} > e^{-ny}$. Ainsi par sommation infinie d'inégalité strictes, on obtient $S(x) > S(y)$. Donc S est une fonction strictement décroissante.

Exercice 26.

Montrer que

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{\frac{5}{2}}}$$

définie une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Préciser $f'(x)$ pour tout x réel.

☞ On considère donc la série de fonctions $\sum f_n$ avec

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^{\frac{5}{2}}}$$

Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme pour tout x réel

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$$

et que la série numérique $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ est une série convergente, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et donc simplement, vers la fonction S .

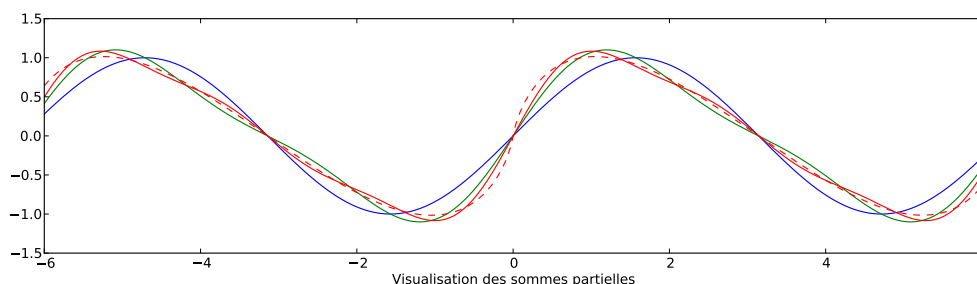
On a $f'_n(x) = \frac{\cos nx}{n^{\frac{3}{2}}}$, et ainsi

$$|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

et donc la série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Ainsi d'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{\frac{3}{2}}}$$

On vérifie facilement que S est 2π périodique. La convergence est assez rapide (3 sommes partielles et en pointillés, la fonction somme) :



Exercice 27.

Montrer que la fonction réelle S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que S est continue sur $]1, +\infty[$ puis sur $]0, +\infty[$.

☞ Si $x > 0$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est une série oscillante vérifiant le critère spécial des séries alternées et ainsi elle converge. On a aussi dans ce cas que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^x}$$

Si $x < 0$, le terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ de la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ ne tend pas vers zéro et ainsi la série numérique diverge grossièrement.

Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

• La série de fonctions continues $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur tout $[a, +\infty[$, $a > 1$ puisque nous avons la majoration

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^a}$$

Ainsi la somme f est continue sur tout $[a, +\infty[$, et donc sur $]1, +\infty[$.

• En utilisant la majoration issue du critère spécial des séries alternées, nous avons pour $\epsilon > 0$, sur $[\epsilon, +\infty[$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^\epsilon}$$

et ainsi la suite de fonction des restes (R_n) de la série de fonctions converge uniformément vers 0 sur $[\epsilon, +\infty[$. On en déduit alors que f est continue sur $]0, +\infty[$.

• Montrons maintenant que la fonction η est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

– la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} (f_n)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, de somme η .

– les fonctions f_n sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, et on a pour tout p entier

$$f_n^{(p)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (-\ln(n))^p}{n^x}$$

– soit $p \geq 1$, et $0 < a < b$, on se place sur le segment $[a, b]$ de $]0, \infty[$. Soit $x \in [a, b]$, on considère la série numérique

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} (-\ln(n))^{(p)}}{n^x}$$

Il s'agit d'une série alternée, de terme général en valeur absolue

$$\frac{\ln(n)^p}{n^x}$$

qui tend vers 0. On regarde alors sa décroissance. Pour cela, on considère la fonction

$$\theta(t) = \frac{\ln^p(t)}{t^x} = \ln^p(t)t^{-x}$$

et on étudie ses variations. On a

$$\theta'(t) = p \ln^{p-1}(t)t^{-x-1} - x \ln^p(t)t^{-x-1} = \ln(t)^{p-1}t^{-x-1}(p - x \ln(t))$$

Ainsi θ est décroissante à partir de $e^{\frac{p}{x}}$.

Alors à partir d'un rang supérieur, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées, et la majoration du reste

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k^{(p)}(x) \right| \leq \frac{\ln^p(n+1)}{(n+1)^x}$$

En prenant $N \geq e^{\frac{p}{a}}$, on a pour tout x entre a et b ,

$$e^{\frac{p}{x}} \leq e^{\frac{p}{a}} \leq N$$

et ainsi de manière uniforme sur $[a, b]$, on a à partir du rang N indépendant de x

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k^{(p)}(x) \right| \leq \frac{\ln^p(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln^p(n+1)}{(n+1)^a}$$

et ainsi

$$\| R_{p,n} \|_{\infty, [a,b]} \leq \frac{\ln^p(n+1)}{(n+1)^a}$$

qui tend vers 0. On obtient la convergence uniforme de la série des dérivée p -ième sur tout segment de $]0, +\infty[$. Ainsi la fonction η est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, et on a par dérivation terme à terme

$$\eta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^p (-1)^{n-1}}{n^x}$$

Exercice 28.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

- 1) Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, strictement décroissante.
- 2) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

☞ 1) Soit $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$ est une série à termes positifs.

Pour $x \leq 0$, $e^{-x\sqrt{n}} \geq 1$ et ainsi la série numérique diverge grossièrement.

Pour $x > 0$, on a $n^2 e^{-x\sqrt{n}}$ de la forme $u^4 e^{-xu}$ avec u qui tend vers $+\infty$ et donc $n^2 e^{-x\sqrt{n}}$ tend vers 0. Ainsi $e^{-x\sqrt{n}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc la série converge.

On en déduit que S est définie sur $]0, +\infty[$.

Soit $a > 0$, nous avons si $x \geq a$, $e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$. Ainsi la série converge normalement sur $[a, +\infty[$. Comme c'est une série de fonctions continues, on en déduit que S est continue sur $[a, +\infty[$. Donc finalement, S est continue sur $]0, +\infty[$.

Si on pose $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$, on a f_n de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f_n^{(k)}(x) = (-1)^k n^{\frac{k}{2}} e^{-x\sqrt{n}}$ et

$$|f^{(k)}(x)| \leq n^{\frac{k}{2}} e^{-a\sqrt{n}}$$

Or la série numérique de terme général $n^{\frac{k}{2}} e^{-a\sqrt{n}}$ est convergente par le fait que

$$n^2 \times n^{\frac{k}{2}} e^{-a\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et ainsi la série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur tout $[a, +\infty[$. Ainsi S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et on a

$$S^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k n^{\frac{k}{2}} e^{-x\sqrt{n}}$$

Si $x < y$, on obtient par opérations (voir la remarque dans le cours) $S(x) > S(y)$ et ainsi S est strictement décroissante.

2) Comme la fonction f est décroissante positive, elle admet une limite $\ell \geq 0$ en $+\infty$. Montrons que $\ell = 0$. On utilise la méthode de la double limite pour les séries de fonctions; la convergence étant uniforme sur $[a, +\infty[$, on a les hypothèses étant validées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x\sqrt{n}} = 0$$

Exercice 29.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose sur $[0, 1]$, $u_n(x) = x^n(1-x)^2$.

1) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ et préciser la fonction somme.

2) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

3) En déduire que

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

☞ 1) Si $x \in [0, 1[$, on sait que

$$\sum_{n=0}^N u_n(x) = (1-x)^2 \sum_{n=0}^N x^n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{(1-x)^2}{1-x} = 1-x$$

Pour $x = 1$, $u_n(1) = 0$ et ainsi $\sum_{n=0}^N u_n(1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 = 1 - 1$.

Ainsi la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement vers la fonction $u : x \mapsto 1 - x$ sur $[0, 1]$.

2) On étudie les variations de la fonction u_n sur $[0, 1]$: u_n est dérivable, et on a

$$\begin{aligned} u'_n(x) &= nx^{n-1}(1-x)^2 - 2x^n(1-x) = x^{n-1}(n(1-x)^2 - 2x(1-x)) \\ &= x^{n-1}((n+2)x^2 - 2(n+1)x + n) \end{aligned}$$

L'équation du second degré $(n+2)x^2 - 2(n+1)x + n = 0$ admet pour discriminant réduit $\Delta' = (n+1)^2 - n(n+2) = 1$, et ainsi elle a pour racine $\frac{n+1 \pm 1}{n+2}$ soit 1 et $\frac{n}{n+2}$; ainsi

$$u'_n(x) = x^{n-1}(n+2)(x-1) \left(x - \frac{n}{n+2} \right)$$

On en déduit les variations de u_n

x	0	$\frac{n}{n+2}$	n
$u'_n(x)$	+	0	-
u_n	0	$\nearrow$ u_n	$\searrow$ 0

puis la norme infinie de u_n sur $[0, 1]$:

$$\|u_n\|_{\infty} = u_n\left(\frac{n}{n+2}\right) = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+2}\right)^2 \leq \frac{4}{(n+2)^2} \leq \frac{4}{n^2}$$

(si $n \neq 0$) et ainsi la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement convergente sur $[0, 1]$.

3) Nous avons une série de fonctions continues qui converge normalement et donc uniformément sur $[0, 1]$ et ainsi

$$\int_0^1 u(x) dx = \frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(x) dx$$

or

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_n(x) dx &= \int_0^1 (x^n - 2x^{n+1} + x^{n+2}) dx \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3} \\ &= \frac{(n+2)(n+3) - 2(n+1)(n+3) + (n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

et ainsi on a bien

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Exercice 30.

On pose pour $x \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

1) Montrer que

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

définit une fonction continue ; préciser la limite de S en $+\infty$.

2) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

3) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0, S''(x) + S(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

☞ 1) Pour $x < 0$, la série numérique $\sum \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ est grossièrement divergente puisque

$$\frac{e^{-nx}}{1+n^2} \sim \frac{(e^{-x})^n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

puisque $e^{-x} > 1$.

Pour $x \geq 0$, on a

$$0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{1+n^2}$$

et ainsi la série de fonctions continues sur $[0, +\infty[$ $\sum u_n$ est normalement convergente, et donc uniformément sur $[0, +\infty[$. La somme S est donc une fonction continue.

2) Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et on a

$$u'_n(x) = -\frac{n}{1+n^2} e^{-nx}$$

On se place sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. On a sur $[a, +\infty[$, pour $n \geq 1$

$$|u'_n(x)| \leq \frac{n}{1+n^2} e^{-na} \leq \frac{(e^{-a})^n}{n} \leq (e^{-a})^n$$

Or la série numérique $\sum (e^{-a})^n$ est une série géométrique convergente. Ainsi la série de fonctions des dérivées $\sum u'_n$ est normalement convergente, et donc uniformément sur $[a, +\infty[$. On en déduit que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ et ainsi sur $]0, +\infty[$ avec

$$S'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{1+n^2} e^{-nx}$$

3) Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et on a

$$u''_n(x) = \frac{n^2}{1+n^2} e^{-nx}$$

On se place sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. On a sur $[a, +\infty[$, pour $n \geq 1$

$$|u_n''(x)| \leq \frac{n^2}{1+n^2} e^{-na} \leq (e^{-a})^n$$

Or la série numérique $\sum (e^{-a})^n$ est une série géométrique convergente. Ainsi la série de fonctions des dérivées secondes $\sum u_n''$ est normalement convergente, et donc uniformément sur $[a, +\infty[$. On en déduit que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ et ainsi sur $]0, +\infty[$ avec

$$S''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{1+n^2} e^{-nx}$$

On remarque (classique désormais) que alors

$$\begin{aligned} S''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 1 - 1}{1 + n^2} e^{-nx} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1 + n^2} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-x}} - S(x) \end{aligned}$$

et ainsi

$$\forall x > 0, S''(x) + S(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

Exercice 31.

Montrer que

$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$$

définit une fonction continue sur $[0, 1]$ et calculer

$$\int_0^1 \psi(x) dx$$

☞ On pose sur $[0, 1]$, $n \geq 2$,

$$f_n(x) = \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

On si $0 \leq x \leq 1$,

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{2}{n^2 - 1}$$

et ainsi

$$\|f_n\|_{\infty, [0,1]} \leq \frac{2}{n^2 - 1} \sim \frac{2}{n^2}$$

ce qui assure la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$, avec les fonctions f_n toutes continues, et ainsi on peut définir ψ continue sur $[0, 1]$. Alors vu qu'il y a convergence uniforme, on a

$$\int_0^1 \psi(x) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

Or nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= \int_0^1 \left[\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right] dx \\ &= [-\ln(n-x) - \ln(n+x)]_0^1 \\ &= -\ln(n-1) - \ln(n+1) + 2\ln(n) = \ln(n) - \ln(n+1) - (\ln(n-1) - \ln(n)) \end{aligned}$$

et ainsi par télescopage, on obtient

$$\int_0^1 \psi(x) dx = \ln(2).$$

Exercice 32.

Montrer que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{Arctan}(nx)$$

définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

☞ Pour la continuité, on obtient facilement la convergence normale puisque avec les notations usuelles, pour tout x réel et n non nul

$$|f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2n^2}$$

Pour la classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$f'_n(x) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + (nx)^2}$$

On s'écarte de 0, sur $|x| \geq a > 0$, on a

$$|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + a^2 n^2} \sim \frac{1}{a^2 n^3}$$

ce qui assure la convergence normale de la série des dérivées $\sum f'_n$ mais sur le domaine $] -\infty, -a] \cup [a, +\infty[$, $a > 0$, et ainsi on obtient la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. On a alors si $x \neq 0$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1 + n^2 x^2)}.$$

Exercice 33.

Montrer que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \sqrt{n+x} - \operatorname{Arctan} \sqrt{n}$$

définit une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$.

☞ Si $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$f_n(x) = \operatorname{Arctan} \sqrt{n+x} - \operatorname{Arctan} \sqrt{n} = x \cdot [\operatorname{Arctan} \sqrt{\cdot}]'(a)$$

avec $n < a < n+x$. Or

$$\operatorname{Arctan} \sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

ce qui conduit à

$$|f_n(x)| \leq \frac{x}{2\sqrt{n}(1+n)}$$

Si on se place sur $[0, a]$ avec $a > 0$, on obtient

$$\|f_n\|_{\infty, [0, a]} \leq \frac{a}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

ce qui assure la convergence normale sur $[0, a]$, $a > 0$. Les fonctions f_n étant continues, nous obtenons la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 34.

Soit $b > 0$.

1) Justifier l'existence de $\int_0^1 \frac{1}{1+t^b} dt$.

2) Justifier l'existence de $\int_0^1 t^{nb} dt$ pour tout entier n et calculer ces intégrales.

3) On souhaite montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nb}$$

Peut-on obtenir le résultat par le théorème d'interversion limite-intégrale ?

Montrer l'égalité ci-dessus en se ramenant aux sommes partielles.

☞ 1) $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^b} = \frac{1}{1+e^{b \ln(t)}}$ est une fonction continue sur $[0, 1]$ avec $f(0) = 1$ par convention (prolongement continu).

On peut donc définir l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$.

2) $t \mapsto t^{nb} = e^{nb \ln(t)}$ continue sur $[0, 1]$ quitte à prolonger par continuité en 0 et on a si $n \geq 0$,

$$\int_0^1 t^{nb} dt = \left[\frac{1}{nb+1} t^{nb+1} \right]_0^1 = \frac{1}{nb+1}$$

3) En écrivant si $t \in]0, 1[$,

$$\frac{1}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{nb}$$

on pourrait penser à une interversion somme infinie intégrale sur $[0, 1]$, mais déjà nous ne sommes pas sur un segment et même, on aurait ici

$$\|f_n\|_{\infty, [0, 1]} = 1$$

si on posait $f_n(t) = (-1)^n t^{nb}$, et donc pas de convergence normale.

On exploite alors la forme de somme géométrique, en passant par les sommes partielles. On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{1+nb} &= \int_0^1 \sum_{n=0}^N (-1)^n t^{nb} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t^b)^{N+1}}{1+t^b} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^b} dt - \int_0^1 \frac{(-t^b)^{N+1}}{1+t^b} dt\end{aligned}$$

et on majore le terme complémentaire,

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t^b)^{N+1}}{1+t^b} dt \right| \leq \int_0^1 t^{b(N+1)} dt = \frac{1}{1+b(N+1)} \rightarrow 0$$

et ainsi

$$\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{1+nb} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+t^b} dt.$$

et donc finalement la série converge (on aurait pu aussi l'obtenir avec le critère spécial des séries alternées) et on a sa somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nb} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^b} dt.$$