Séries entières

Table des matières

1 Programme officiel 4

2 Introduction 6

3 Séries entières 6
- 3.1 Définition d'une série entière . . . 6
- 3.2 Rayon de convergence d'une série entière . . . 6
  - 3.2.1 Le lemme d'Abel . . . 7
  - 3.2.2 Définition du rayon de convergence . . . 8
  - 3.2.3 Théorèmes de comparaison . . . 11
  - 3.2.4 Cas de la suite bornée . . . 12
  - 3.2.5 Un cas très particulier . . . 12
  - 3.2.6 Rayon de la série dérivée . . . 12
  - 3.2.7 Rayon de la série entière $\sum n^\alpha z^n$ . . . 13
  - 3.2.8 Utilisation de la règle de d'Alembert . . . 13
  - 3.2.9 Rayon d'une somme . . . 15
  - 3.2.10 Rayon d'un produit de Cauchy . . . 15

4 Étude de la somme d'une série entière 16
- 4.1 Continuité de la somme . . . 16
- 4.2 Cas des extrémités . . . 17
- 4.3 Primitivation et dérivation . . . 17
  - 4.3.1 Primitivation . . . 17
  - 4.3.2 Dérivation . . . 20

5 Développement en série entière : cas de la variable complexe 21
- 5.1 Cas de la série géométrique . . . 21
- 5.2 Cas de la série exponentielle . . . 22

6 Développement en série entière : cas de la variable réelle 23
- 6.1 Généralités . . . 23
  - 6.1.1 Définition . . . 23
  - 6.1.2 Exemples . . . 23
- 6.2 Série de Taylor d'une fonction . . . 23
- 6.3 Contre exemple . . . 24
- 6.4 Formule de Taylor avec reste intégral . . . 25
- 6.5 Propriétés . . . 26
- 6.6 Développements en série entière usuels . . . 27
- 6.7 Utilisation des équations différentielles linéaires . . . 28

7 Exercices 34
- 7.1 Rayon de convergence . . . 34
- 7.2 Bornes de l'intervalle de convergence . . . 34
- 7.3 Calculs de sommes . . . 35
- 7.4 Développements en séries entières . . . 36

7.5 Séries entières et équations différentielles . . . 36
7.6 Oraux . . . 37
7.7 Autres . . . 37

8 Exercices corrigés **38**
8.1 Rayon de convergence . . . 38
8.2 Comportement aux bornes de l'intervalle de convergence . . . 42
8.3 Calculs de sommes . . . 44
8.4 Développements en séries entières . . . 53
8.5 Séries entières et équations différentielles . . . 59
8.6 Oraux . . . 65
8.7 Autres . . . 67

9 Compléments hors programme **68**
9.1 Fonctions développables en séries entières . . . 68
9.1.1 Une condition suffisante . . . 68
9.1.2 Une autre condition suffisante . . . 69
9.2 Développement en série entière en 0 de la fonction tangente . . . 70
9.3 Formule de Cauchy-Hadamard . . . 72
9.3.1 Formule de Cauchy-Hadamard (version allégée) . . . 72
9.3.2 Formule de Cauchy-Hadamard (version générale) . . . 73
9.4 Théorème de continuité radiale d'Abel . . . 75
9.4.1 Théorème de continuité radiale d'Abel . . . 75
9.4.2 Complètement hors programme : Théorème de continuité angulaire de Stolz 78

Index

cercle d'incertitude, 8
continuité de la somme, 16

disque ouvert de convergence, 8
domaine de convergence, 6
dérivation d'une série entière, 20
dérivation terme à terme, 20

fonction développable en série entière en 0, 23
formule de Taylor avec reste intégrale, 25

intervalle ouvert de convergence, 8
intégration d'une série entière, 17
intégration terme à terme, 17
inégalité de Taylor-Lagrange, 25

lemme d'Abel, 7

rayon d'un produit, 15
rayon d'une somme, 15
rayon de convergence, 8

série de Taylor, 23
série entière, 6
série entière dérivée, 13
série exponentielle complexe, 22
série géométrique, 21

1 Programme officiel

C - Séries entières

Les objectifs de cette section sont les suivants :
– étudier la convergence d'une série entière et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;
– étudier les propriétés de sa somme en se limitant à la continuité dans le cas d'une variable complexe ;
– établir les développements en séries entière des fonctions usuelles.
Les séries entières trouveront un cadre d'application dans la notion de fonction génératrice en probabilités.

a) Rayon de convergence

Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.
Lemme d'Abel :
si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.
Intervalle ouvert de convergence.
Disque ouvert de convergence.

La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$, et elle diverge grossièrement di $|z| > R$.

Avec R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ (resp. $\sum b_n z^n$) :
– si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$
– si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R\left(\sum n^\alpha x^n\right) = 1$.
Le résultat s'applique en particulier lorsque $a_n = \mathrm{o}(b_n)$.

Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.
Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

La limite du rapport $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ peut-être directement utilisée.

b) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ou du disque de convergence n'est pas un objectif du programme.

Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence. Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme. Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.	Relation $R(\sum a_n x^n) = R(\sum n a_n x^n)$.

c) Développement en séries entière au voisinage de zéro d'une fonction d'une variable réelle

Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.

Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Unicité du développement en série entière.	Formule de Taylor avec reste intégral.
Développements des fonctions usuelles.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise.

d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe.

On admet la continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe sur le disque ouvert de convergence. Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert. Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.	La démonstration est hors programme.

2 Introduction

Les séries entières (complexes) sont les séries de fonctions de la forme

$$\sum a_n z^n$$

Leur particularité est qu'il existe un disque dit de convergence centrée en 0, de rayon R (éventuellement nul ou infini) de sorte qu'il y ait convergence à l'intérieur, divergence à l'extérieur ; par contre, il y a incertitude sur le cercle de rayon R. Pour la variable réelle, on aura donc un intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$, l'étude aux extrémités étant plus particulière, dite non une priorité du programme mais faisant partie des questions intéressantes dans les sujets.

Pour la variable réelle, on disposera d'une convergence normale sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence, d'où la continuité de la somme sur $]-R, R[$. D'autre part, la série des dérivées possède le même rayon de convergence. On aura donc la somme de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec une dérivation termes à termes (et une intégration terme à terme).

Une application fondamentale des séries entières est la recherche de solutions particulières des équations différentielles, celles qui sont justement développable en série entière. Combinés à la connaissance de la structure de l'espace des solutions d'une équation différentielle, elles permettent de progresser voire d'achever la résolution, surtout si on y ajoute l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Enfin, on verra aussi que les séries entières apportent une aide à l'étude des variables aléatoires discrète, par le biais de la série génératrice.

3 Séries entières

3.1 Définition d'une série entière

Définition 1. *On appelle série entière une série de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme*

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ avec } f_n(z) = a_n z^n$$

où (a_n) est une suite de complexes. On parle de série entière du fait des puissances entières. On notera abusivement $\sum a_n z^n$ la série entière.
Les a_n peuvent être appelés les coefficients de la série entière.

Quelques exemples de séries entières :

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$$

On remarquera qu'à chaque fonction polynôme est associée une série entière (dont les coefficients a_n sont nuls à partir d'un certain rang), qui converge simplement sur $\mathbb{C}$ tout entier, de somme la fonction polynôme.

3.2 Rayon de convergence d'une série entière

Définition 2. *On appelle domaine de convergence D d'une série entière $\sum a_n z^n$ l'ensemble des complexes z tels que la série numérique $\sum a_n z^n$ soit convergente*

La spécificité des séries entières est que la série de fonctions converge sur tout un disque ouvert, éventuellement de rayon infini, diverge à l'extérieur de ce disque. Au bord de ce disque, ce que l'on appelle le cercle d'incertitude, la situation est plus délicate ; il peut y avoir convergence ou divergence, point par point. Le rayon de ce disque est ce que l'on appelle le rayon de convergence de la série. En d'autres termes, on aura

$$D_o(0,R) \subset D \subset D_f(0,R)$$

Ce fait s'observe sur des exemples simples :

• On considère la série entière $\sum z^n$. On sait que $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z|<1$: en effet pur $z=1$, la série diverge et pour $z \neq 1$

$$S_n(z) = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

qui converge (avec $z \neq 1$) si et seulement si $|z|<1$. Le domaine de convergence est $D_o(0,1)$.

• On considère la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$.
Pour $z=0$, la série converge.
Pour $z \neq 0$, on utilise la règle de d'Alembert

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right|$$

qui tend vers 0 et ainsi la série numérique $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente. Le domaine de convergence est $\mathbb{C}$ tout entier (disque de rayon infini).
• On considère la série entière $\sum n!z^n$.
Pour $z=0$, la série converge.
Pour $z \neq 0$, le terme général $n!z^n$ de la série numérique $\sum n!z^n$ ne tend pas vers 0. Ainsi la série numérique $\sum \frac{z^n}{n!}$ diverge grossièrement. Le domaine de convergence est $\{0\}$ (disque fermé de rayon nul).
• On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$.
Pour $z=0$, la série converge.
Pour $z \neq 0$, on utilise la règle de d'Alembert

$$\frac{\frac{|z|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|z|^n}{n}} = \frac{n}{n+1} z \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|$$

Ainsi, si $|z|<1$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument, donc converge ;
si $|z|>1$, la série numérique diverge grossièrement (la suite $\left(\frac{z^n}{n}\right)$ est non bornée.
Pour $|z|=1$, c'est plus difficile : pour $z=1$, il y a divergence. On peut montrer que sinon, il y a convergence (on connaît le résultat pour $z=-1$ par exemple), par une méthode dite méthode de la transformation d'Abel qui n'est pas au programme, mais qui peut faire l'objet de sujet adapté.

3.2.1 Le lemme d'Abel

Le *lemme d'Abel* est le résultat fondamental élémentaire du chapitre :

LEMME 1. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, on suppose qu'il existe un complexe non nul z_0 de sorte que la suite numérique $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors pour tout complexe z tel que $|z|<|z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.*

Preuve :
On écrit

$$a_n z^n = a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$$

et ainsi comme $(a_n z_0^n)$ est bornée, par un réel positif B, on a

$$|a_n z^n| \leqslant B \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

Or $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$ et ainsi par comparaison à une série géométrique convergente, on en déduit que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. ★

3.2.2 Définition du rayon de convergence

Définition 3. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle rayon de convergence R la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ de l'ensemble des réels positifs ρ tels que la suite $(a_n \rho^n)$ soit bornée.*

$$R = \sup_{\rho \in \mathbb{R}^+} \{\rho\,,\ (a_n \rho^n) \text{ bornée}\}$$

Proposition 1. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R.*
• *Si $R = +\infty$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge pour tout z complexe.*
• *Si $0 < R < +\infty$, alors :*
– pour tout complexe z tel que $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument et donc la suite $(a_n z^n)$ est bornée (converge vers zéro même)
– pour tout complexe z tel que $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement, avec $(a_n z^n)$ non bornée.
• *Si $R = 0$, la série converge uniquement pour $z = 0$.*

Preuve :
• Si $|z| < R$, alors par la caractérisation de la borne supérieure, il existe $\rho \in \mathbb{R}^+$ tel que $|z| < \rho < R$ de sorte que $(a_n \rho^n)$ bornée. Alors d'après le lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, donc convergente. On a aussi la suite $(a_n z^n)$ bornée, convergente vers 0.

• Si $|z| > R$, alors $(a_n z^n)$ n'est pas bornée par définition de R, donc ne converge pas vers zéro et ainsi la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente. ★

Définition 4. *Lorsque $0 < R < +\infty$, le disque ouvert*

$$D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}\,,\ |z| < R\}$$

est appelé disque ouvert de convergence.

L'intervalle $]-R, R[$ est appelé intervalle ouvert de convergence.

Le cercle de centre 0 et de rayon R est appelé le *cercle d'incertitude*. On ne peut rien dire de la convergence de la série $\sum a_n z^n$ lorsque z appartient à ce cercle. Il s'agit d'un lieu limite du point de vue de la convergence de la série entière.

• On considère la série entière $\sum z^n$. On sait qu'elle converge si et seulement si $|z| < 1$. Ainsi $R = 1$. Dans ce cas, il y a divergence de la série en tout point du cercle de convergence.

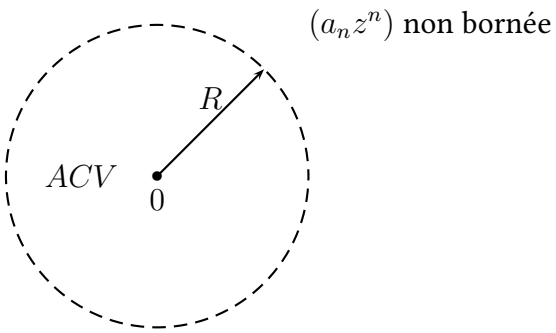


FIGURE 1 – Le cercle de l'incertitude

• La série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} z^n$ a pour rayon 1 puisque la suite $\left(\frac{1}{n} z^n\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée si et seulement si $|z| \leqslant 1$. Pour $z = -1$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente (critère spécial des séries alternées) et pour $z = 1$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

On peut montrer (difficile, nécessite la transformation d'Abel hors programme) en écrivant $z = \mathrm{e}^{i\theta}$, que si $\theta \notin 2\pi\mathbb{R}$, la série est convergente.

• La série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} z^n$ a pour rayon 1 puisque la suite $\left(\frac{1}{n^2} z^n\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée si et seulement si $|z| \leqslant 1$.

Ici, pour tout z avec $|z| \leqslant 1$, on a la série qui converge (absolument) puisque

$$\left|\frac{1}{n^2} z^n\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Des résultats immédiats :

PROPOSITION 2. *Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.*

En pratique, pour la détermination du rayon, on peut donc « oublier » le signe, l'angle de a_n.

COROLLAIRE 1. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$.*
1) Si la série numérique $\sum a_n z_0^n$ converge (en particulier si $\sum |a_n z_0^n|$ converge), alors $R \geqslant |z_0|$.
2) Si la série numérique $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $R \leqslant |z_0|$.
3) Si la série numérique $\sum |a_n z_0^n|$ converge et $\sum a_n z_0^n$ diverge alors $R = |z_0|$.

Preuve :
1) Si la série numérique $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $(a_n z_0^n)$ converge vers 0, donc est bornée et ainsi la suite $(a_n |z_0|^n)$ est bornée, alors par définition de R, $R \geqslant |z_0|$.

2) Si la série numérique $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $R > |z_0|$ contredit la convergence absolue à l'intérieur du disque de convergence. Donc $R \leqslant |z_0|$.

3) Si la série numérique $\sum |a_n z_0^n|$ converge et $\sum a_n z_0^n$ diverge alors la série $\sum a_n z_0^n$ est convergente et ainsi $R \geqslant |z_0|$ déjà.

D'autre part, $\sum a_n z_0^n$ diverge, et ainsi forcément $R \leqslant |z_0|$. On a bien $R = |z_0|$.
★

• Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec (a_n) une suite de chiffres non nuls.
Déterminons le rayon de convergence la série entière. Comme

$$|a_n z^n| \leqslant 9z^n$$

on obtient que pour $\rho \leqslant 1$, la suite $(a_n \rho^n)$ est bornée. Ainsi $R \geqslant 1$.

D'autre part, prenons $z = 1$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est la série $\sum a_n$; or $a_n \geqslant 1$, et ainsi la série $\sum a_n$ est divergente. On en déduit que $R \leqslant 1$. Finalement $R = 1$.

• On considère la série entière $\sum a_n z^n$ avec a_n la n-ième décimale de π (la 0 ième étant 3). Déterminons le rayon de convergence la série entière. Comme

$$|a_n z^n| \leqslant 9z^n$$

on obtient que pour $\rho \leqslant 1$, la suite $(a_n \rho^n)$ est bornée. Ainsi $R \geqslant 1$.

D'autre part, prenons $z = 1$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est la série $\sum a_n$; si cette série, à termes positifs, entiers, était convergente, la suite (a_n) serait une suite d'entiers qui converge vers 0. Mais alors, pour la précision $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe un rang à partir duquel

$$-\frac{1}{2} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{2}$$

et comme a_n entier, $a_n = 0$. La suite (a_n) est nulle à partir d'un certain rang, et ainsi on aurait π nombre décimal, ce qui est absurde (on suppose connu ce fait, pas facile à prouver !).

Cela aurait pu être la définition de base de rayon d'une série entière : le programme officiel fait que cela devient une propriété ; ceci dit, il est plus facile à priori d'étudier le caractère bornée de $(a_n|z|^n)$ que d'étudier la convergence de $\sum a_n z^n$, d'où le choix de la définition officielle.

Proposition 3. *Le rayon R d'une série entière $\sum a_n z^n$ vérifie*

$$R = \sup \left\{ |z| \, , \, \sum a_n z^n \text{ converge} \right\}$$

la borne supérieure étant prise dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Preuve :
On note

$$R' = \sup \left\{ |z| \in \mathbb{C} \, , \, \sum a_n z^n \text{ converge} \right\}$$

et on montre que $R = R'$.

Dans le cas où $R = +\infty$, d'après les propriété ci-dessus, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge pour tout complexe z et ainsi $R' = +\infty$ aussi : $R = R'$.

Sinon, soit z avec $\sum a_n z^n$ convergente, alors $|z| \leqslant R$ (si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée et donc la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement). Ainsi $R' \leqslant R$ (et donc $R' < +\infty$ aussi).
Si on avait $R' < R$, en prenant z avec $R' < |z| < R$, on obtient une contradiction :
$\sum a_n z^n$ converge puisque $|z| < R$ ce qui contredit la définition de R'. Donc on a $R' \geqslant R$ et finalement $R = R'$. ★

En pratique, on utilise souvent les résultats suivants, et même dans des formes parfois modifiées :

PROPOSITION 4. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R.*
1) Si pour tout z avec $|z| < r$ la série $\sum a_n z^n$ converge. Alors $R \geqslant r$.
2) Si pour tout z avec $|z| > r$ la série $\sum a_n z^n$ diverge. Alors $R \leqslant r$.

Preuve :
1) En effet, si $R < r$, en prenant z avec $R < |z| < r$, $\sum a_n z^n$ converge, $(a_n z^n)$ tend vers 0, donc bornée et ainsi $(a_n |z|^n)$ bornée, ce qui contredit la définition de R.
2) Si on avait $R > r$, en prenant z avec $R > |z| > r$, $\sum a_n z^n$ diverge, ce qui contredit la propriété de convergence absolue à l'intérieur du disque de convergence. ★

PROPOSITION 5. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R. 1) Si pour tout z avec $|z| < r$ la suite $(a_n z^n)$ est bornée, alors $R \geqslant r$.*
Si pour tout z avec $|z| > r$ la série $(a_n z^n)$ est non bornée, alors $R \leqslant r$.

Preuve :
1) Si on avait $R < r$ en prenant z avec $R < |z| < r$, on aurait $(a_n z^n)$ bornée ce qui contredit la définition de R.
2) Si on avait $R > r$, en prenant z tel que $R > |z| > r$, on aurait $(a_n z^n)$ non bornée, ce qui contredit le fait que à l'intérieur du disque de convergence, la suite $(a_n z^n)$ converge vers 0. ★

3.2.3 Théorèmes de comparaison

PROPOSITION 6. *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon respectifs R_a et R_b.*
1) Si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$ (et à fortiori si $a_n = o(b_n)$)
2) Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Preuve :
1) On a donc $a_n z^n = \mathcal{O}(b_n z^n)$. Soit z avec $|z| < R_b$, la suite $(b_n z^n)$ est bornée, et ainsi $(a_n z^n)$ aussi. Ainsi par propriété on a forcément $R_a \geqslant R_b$.

2) On a $|a_n| - |b_n| = o(|b_n|)$, donc $|a_n| - |b_n| = \mathcal{O}(|b_n|)$. Alors

$$|a_n z^n| - |b_n z^n| = \mathcal{O}(b_n z^n)$$

Si $|z| < R_b$, la suite $(b_n z^n)$ est bornée et ainsi $|a_n z^n| - |b_n z^n|$ bornée d'où $(a_n z^n)$ bornée. Ainsi par propriété, $R_a \geqslant R_b$.

En échangeant les rôles des deux séries entières, on a aussi $R_b \geqslant R_a$ et ainsi finalement $R_a = R_b$.
★

3.2.4 Cas de la suite bornée

On se sert souvent du résultat suivant :

Proposition 7. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec la suite (a_n) bornée. Alors le rayon R vérifie $R \geqslant 1$.*

Preuve :
En effet si B désigne une borne de la suite (a_n), on a alors

$$|a_n z^n| \leqslant |B||z|^n$$

Ainsi si $z = 1$, la suite $(a_n z^n)$ est bornée et forcément $R \geqslant 1$. ★

3.2.5 Un cas très particulier

Proposition 8. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec la série $\sum a_n$ divergente et $\sum (-1)^n a_n$ convergente (ou l'inverse). Alors $R = 1$.*

Preuve :
En effet, si $\sum a_n 1^n$ diverge alors forcément $R \leqslant 1$ et si $\sum a_n (-1)^n$ converge, alors $R \geqslant 1$. Donc $R = 1$. ★

Par exemple, la série $\sum \frac{1}{n} z^n$ est de rayon 1.

3.2.6 Rayon de la série dérivée

Proposition 9. *Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.*

Preuve :
Notons R et R' les rayons des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$.

• Comme on a

$$|a_n| \leqslant |n a_n|$$

on a $a_n = \mathcal{O}(n a_n)$ et ainsi par propriété de domination $R \geqslant R'$.

• Soit z avec $|z| < R$. On considère r avec $|z| < r < R$. On écrit

$$|n a_n z^n| = |a_n r^n| \times n \left|\frac{z}{r}\right|^n$$

La suite $(a_n r^n)$ est bornée et la suite $\left(n \left|\frac{z}{r}\right|^n\right)$ est convergente vers 0, par prédominance de l'exponentielle sur les puissances et est donc bornée ; ainsi la suite $(n a_n z^n)$ est bornée. On a alors $R' \geqslant R$ et finalement $R = R'$. ★

Corollaire 2. *Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum_{n \geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.*

Preuve :
Il suffit de remarquer que

$$\sum_{k=1}^{n} k a_k z^k = z \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}$$

et d'utiliser le théorème précédent. ★

Définition 5. *$\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ est appelée série entière dérivée de la série entière $\sum a_n z^n$.*

• Comme $\sum z^n$ est de rayon 1, les séries

$$\sum nz^n \qquad \sum nz^{n-1} \qquad \sum \frac{1}{n} z^n \qquad \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

(et bien d'autres) ont toutes pour rayon de convergence 1.

3.2.7 Rayon de la série entière $\sum n^\alpha z^n$

Proposition 10. *La série entière $\sum n^\alpha z^n$ est de rayon 1.*

Preuve :
On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\alpha z^n$.
Si $|z| < 1$, la suite $(n^\alpha |z|^n)$ tend vers 0 et est donc bornée. Ainsi forcément $R \geqslant 1$.
Si $|z| > 1$, la suite $(n^\alpha |z|^n)$ tend vers $+\infty$ et donc n'est pas bornée. Ainsi forcément $R \leqslant 1$.
On a donc $R = 1$.
On peut aussi utiliser la règle de d'Alembert qui suit. ★

3.2.8 Utilisation de la règle de d'Alembert

Proposition 11. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec a_n ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ admet une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup +\infty$ alors*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L} & \text{si } L \in]0, +\infty[\\ +\infty & \text{si } L = 0 \\ 0 & \text{si } L = +\infty \end{cases}$$

Preuve :
Soit $z \neq 0$, on considère la série numérique $\sum |a_n z^n|$. On a

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| . |z|$$

– dans le cas où $L = 0$, on obtient par application de la règle de d'Alembert, que la série $\sum |a_n z^n|$ converge et ainsi $\sum a_n z^n$ aussi. On en déduit que $R = +\infty$.

– dans le cas où $L = +\infty$, on obtient que la série $\sum |a_n z^n|$ diverge grossièrement. Ainsi $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0 et on a alors $\sum a_n z^n$ divergente. On a alors $R = 0$.

– dans le cas où $L \in]0, +\infty[$, on obtient que

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| . |z| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L.|z|$$

Ainsi si $|z| < \frac{1}{L}$,

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| .|z| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L.|z| < 1$$

et donc par application de la règle de d'Alembert, que la série $\sum |a_n z^n|$ converge ; on a alors $R \geqslant \frac{1}{L}$ (soit par propriété, soit par la définition et le caractère bornée de $(a_n z^n)$.)
Puis si $|z| > \frac{1}{L}$,

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| .|z| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L.|z| > 1$$

et donc par application de la règle de d'Alembert, que la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement ; on a alors $R \leqslant \frac{1}{L}$.
On a donc dans ce cas, $R = \frac{1}{L}$, formule valable aussi dans les cas extrêmes en notation dans $\overline{\mathbb{R}_+}$. ★

• On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$. Ici $a_n = \frac{1}{n} > 0$; on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$$

et ainsi $R = 1$.

Pour $z = 1$, la série est la série harmonique, donc diverge.
Pour $z = -1$, la série est la série harmonique alternée, donc converge.
L'intervalle réel de convergence est donc $[-1, 1[$.

• Exemple fondamental : on considère la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$. Posons $a_n = \frac{1}{n!}$, on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi le rayon de convergence est $+\infty$.

Attention au cas des séries entières lacunaires, la règle ne s'appliquant pas puisque les termes ne vérifient pas l'hypothèse de non nullité à partir d'un certain rang. Dans ces cas, il est fortement conseillé de se ramener à l'étude de la série numérique, bref de refaire le raisonnement de A à Z. Par exemple

Proposition 12. *Soit $\sum a_n z^{2n}$ une série entière avec a_n ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ admet une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup +\infty$ alors*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L}} & \text{si } L \in]0, +\infty[\\ +\infty & \text{si } L = 0 \\ 0 & \text{si } L = +\infty \end{cases}$$

Preuve :
En effet, on a dans le cas $L \in]0, +\infty[$,

$$\frac{|a_{n+1}z^{2n+1}|}{|a_n z^{2n}|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| .|z|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L.|z|^2$$

La condition de comparaison à 1 de $L|z|^2$ donne une comparaison de $|z|$ à $\frac{1}{\sqrt{L}}$. ★

• On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 2^n z^{3n}$. On pose $u_n = 2^n |z|^{3n}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2|z|^3 \longrightarrow 2|z|^3$$

Si $2|z|^3 < 1$, c'est à dire $|z| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, la série $\sum u_n$ converge ; ainsi $R \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
Si $2|z|^3 > 1$, c'est à dire $|z| > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement ; ainsi $R \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
Donc le rayon de convergence est

$$R = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

3.2.9 Rayon d'une somme

La proposition qui suit permet d'obtenir des informations sur le *rayon d'une somme* de deux séries entières :

Proposition 13. *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R et R'. Alors le rayon R'' de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie*

$$R'' \geqslant \min(R, R')$$

Lorsque $R \neq R'$, on a en fait $R'' = \min(R, R')$. On a de plus pour tout complexe z avec $|z| < \min(R, R')$ par sommation de séries convergentes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n a) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Preuve :
Si $|z| < \min(R, R')$, les séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent et ainsi la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ aussi. Ainsi $R'' \geqslant \min(R, R')$.

Dans le cas où $R \neq R'$, par exemple $R < R'$, en prenant z avec $R < |z| < R'$, on a $\sum a_n z^n$ qui diverge et $\sum b_n z^n$ qui converge (grossièrement), et ainsi $\sum (a_n + b_n) z^n$ diverge. Donc $R'' \leqslant R$. Dans ce cas, on a donc $R'' = \min(R, R')$.
★

Proposition 14. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et λ un scalaire non nul. Alors $\sum \lambda a_n z^n$ a le même rayon de convergence et on a à l'intérieur du disque de convergence*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

3.2.10 Rayon d'un produit de Cauchy

On s'intéresse ici au *rayon d'un produit*. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. Soit z, on considère le produit de Cauchy

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n \times \sum_{n \geqslant 0} b_n z^n = \sum_{n \geqslant 0} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \sum_{n \geqslant 0} c_n z^n$$

avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Ainsi le produit de Cauchy de deux séries entières est une série entière.

PROPOSITION **15.** *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon R et R'. La série entière produit de Cauchy est de rayon R'' avec*

$$R'' \geqslant \min(R, R')$$

Preuve :
Si $|z| < \min(R, R')$, $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument, et donc le produit de Cauchy converge absolument, et donc converge. Ainsi $R'' \geqslant \min(R, R')$. ★

Quelques remarques :

• l'inégalité peut-être stricte : on prend les séries entières $\sum z^n$ et $1 - z$, l'une de rayon 1 et l'autre de rayon infini, les rayons étant donc distincts. La série produit est la constante 1, de rayon infini.

• Deux séries entières de rayons finis peuvent donner une série entière produit de Cauchy de rayon plus grand : on considère la série entière associée à $\sqrt{1-x}$ (voir plus loin) de rayon 1 ; le produit de Cauchy de cette série entière avec elle même est $1 - z$, de rayon infini.
• on a parfois l'égalité : on effectue le produit de $1 - x$ de rayon infini par $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ de rayon 1 (voir plus loin), on obtient $\sqrt{1-x}$ de rayon 1.

4 Étude de la somme d'une série entière

4.1 Continuité de la somme

THÉORÈME **16.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon non nul. Alors la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalement (et donc uniformément) sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.*

Preuve :
Soit $[a, b]$ un segment de $]-R, R[$, on a $r = \max(|a|, |b|) < R$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, $|x| \leqslant r$ et

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n r^n|$$

or comme $0 \leqslant r < R$, la série numérique $\sum a_n r^n$ est absolument convergente, ce qui permet de conclure à la convergence normale de la série de fonctions (notation abusive) $\sum(a_n x^n)$ sur $[a, b]$. ★

COROLLAIRE **3.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon non nul de somme f sur $]-R, R[$. Alors f est continue sur $]-R, R[$.*

Preuve :
En effet, d'après la proposition précédente, comme on a la convergence normale sur tout segment de $]-R, R[$, et que la série de fonction $\sum a_n x^n$ est une série de fonctions continues, on obtient la continuité de f sur tout segment de $]-R, R[$. Ainsi f est continue sur $]-R, R[$. ★

Dans la proposition qui suit, on considère la fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

fonction définie sur l'espace vectoriel normé $\mathbb{C}$ à valeur dans l'ensemble des scalaires $\mathbb{C}$.

PROPOSITION **17** (admis). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière complexe de rayon non nul de somme f sur le disque ouvert de convergence. Alors f est continue sur le disque ouvert de convergence $D(0, R)$.*

4.2 Cas des extrémités

Proposition 18. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R. Si la série numérique $\sum |a_n| R^n$ est convergente, alors la série de fonction $\sum a_n x^n$ est normalement convergente sur $[-R, R]$. On obtient alors que la somme est continue sur $[-R, R]$.*

Preuve :
En effet $|a_n x^n| \leqslant |a_n| R^n$ sur $[-R, R]$. Comme la série numérique $\sum |a_n| R^n$ converge, on obtient la convergence normale de la série de fonctions continues sur $[-R, R]$, d'où le résultat. ★

• Exemple d'un cas plus subtil : on considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ qui est de rayon 1. Ainsi la somme S est déjà une fonction continue sur $]-1, 1[$.
Pour $x = -1$, on obtient la série $\displaystyle -\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ qui est divergente.
Pour $x = 1$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ vérifie le critère spécial des séries alternées.
Ainsi l'intervalle réel de convergence est $]-1, 1]$.

Pour $x \in [0, 1]$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Ainsi on a la majoration du reste

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

et ainsi $\| R_n \|_{\infty,[0,1]} \leqslant \frac{1}{n+1}$. On en déduit que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ converge uniformément sur $[0, 1]$. Comme il s'agit d'une série de fonctions continues, on en déduit que la somme S est continue sur $[0, 1]$. Ainsi finalement, la somme est une fonction continue sur $]-1, 1]$.

4.3 Primitivation et dérivation

4.3.1 Primitivation

Théorème 19. *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$, $I =]-R, R[$ l'intervalle ouvert de convergence et S la somme définie sur I. Alors la série*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

est aussi de rayon R et la primitive Σ de S prenant la valeur c en 0 est donnée par

$$\Sigma(x) = c + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n = c + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

On dit que l'on intègre terme à terme.

Preuve :
Posons $b_n = \frac{a_{n-1}}{n}$ pour $n \geqslant 1$. On note R' le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$.

La série dérivée de $\sum b_n x^n$ est $\sum a_n x^n$ de même rayon R.

Soit $x \in]-R, R[$, on sait que la série de fonctions (fonctions continues) $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur le segment d'extrémités 0 et x. Ainsi on peut en déduire que la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t$ est convergente et que

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

d'où le résultat. ★

• Par exemple,

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad x \in]-1, 1[}$$

avec un rayon 1, et ainsi par intégration terme à terme

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

On peut prolonger l'étude de cette série entière :

• Pour $x = 1$, on obtient la série $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, série convergente par le critère spécial des séries alternées.

• Pour $x = -1$, on obtient la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$, série divergente.

• On sait déjà par théorème que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment de $]-1, 1[$.

• En fait on peut montrer facilement la convergence uniforme de cette série sur $[0, 1]$: on a

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

en utilisant la majoration du reste des séries oscillante vérifiant le critère spécial des séries alternées. On en déduit que

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

définie une fonction continue sur $[0, 1]$, et donc sur $]-1, 1]$, et par passage à la limite en 1 à gauche, on en déduit que

$$\boxed{\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}}$$

Nous avons aussi

$$\boxed{\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \qquad x \in [-1,1[}$$

soit encore

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \qquad x \in]-1,1]}$$

• Application à la fonction arc tangente : pour tout x réel, on a

$$\text{Arctan}'\, x = \frac{1}{1+x^2}$$

et pour tout x avec $|z| < 1$, on a

$$\forall z \in \mathbb{C}\,,\ |z| < 1\,,\ \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$$

d'où par substitution

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}$$

et ainsi par intégration

$$\boxed{\text{Arctan}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad x \in]-1,1[}$$

La encore, pour $x \in [0,1]$, nous avons une série numérique oscillante qui vérifie le critère spécial des séries alternées, et ainsi on a une majoration du reste

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \frac{1}{2n+3}$$

ce qui assure la convergence uniforme de la série de fonctions sur $[0,1]$. Ainsi

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

définie sur fonction continue sur $[0,1]$. Pour $x = 1$, on a alors

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}}$$

Ceci dit, la convergence de cette série étant extrêmement lente, cela ne constitue pas un moyen efficace pour déterminer π.

4.3.2 Dérivation

THÉORÈME 20. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$, $I =]-R, R[$ l'intervalle ouvert de convergence et S la somme définie sur I. Alors S est dérivable , la série $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ de rayon R, et on a*

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$$

Preuve :
On pose $u_n(x) = a_n x^n$. La série de fonction $\sum u_n$ converge simplement sur I.
La série des dérivées $\sum u'_n$ égale à $\sum n a_n x^{n-1}$ possède le même rayon de convergence, et elle converge donc normalement sur tout segment de I. On peut alors *dériver terme à terme*,

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$$

★

COROLLAIRE 4. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et sur $I =]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et on a pour tout k entier naturel sur I*

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\cdots(n+k)a_{n+k}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(k+n)!}{n!}a_{n+k}x^n = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!}a_n x^{n-p}$$

les séries étant toutes de même rayon R. En particulier, on a

$$S^{(k)}(0) = k!a_k \qquad a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$$

et particulier $S(0) = a_0$, $S'(0) = a_1$, $S''(0) = \frac{a_2}{2}$.

Preuve :
Par récurrence sur k, on montre que S est k-fois dérivable et que

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\cdots(n+k)a_{n+k}x^n$$

Pour $k = 0$ et $k = 1$, cela est déjà connu. On le suppose au rang k. Alors on applique le théorème de dérivation : on a $S^{(k)}$ qui est dérivable sur I avec

$$\begin{aligned} S^{(k+1)}(x) &= S^{(k)\prime}(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)' \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)b_{n+1}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+1+k)a_{n+1+k}x^n \end{aligned}$$

cette nouvelle série étant aussi de rayon R, ce qui achève la récurrence. On en déduit alors que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. ★

Proposition 21. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon non nulle et f sa somme réelle. Alors f est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R,R[$ et on a*

$$\forall p \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in]-R,R[\,,\ f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) a_n x^{n-p}$$

• On rappelle que

$$\forall z \in \mathbb{C}\,,\ |z|<1\,,\ \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \sum_{n=p}^{+\infty} z^n = \frac{z^p}{1-z}$$

Par dérivation sur $]-1,1[$,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

puis en dérivant de nouveau

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) x^n = \frac{2!}{(1-x)^3}}$$

Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\boxed{\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\cdots(n+p) x^n = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}}$$

soit encore

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}}$$

5 Développement en série entière : cas de la variable complexe

5.1 Cas de la série géométrique

Proposition 22. *Soit z un complexe avec $|z|<1$. Alors*

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

Preuve :
C'est une application des sommes géométriques. Lorsque $z \neq 1$, on sait que

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

Dans le cas où $|z|<1$, la suite de complexes (z^{n+1}) converge vers 0, comme suite géométrique de raison strictement inférieure à 1. Ainsi la suite $(1+z+\cdots+z^n)$ des sommes partielles converge vers $\frac{1}{1-z}$ d'où le résultat attendu. ★

5.2 Cas de la série exponentielle

Nous savons (première année, application de la formule de Taylor avec reste intégral) que pour tout réel x, on a

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a d'après la formule de Taylor avec reste intégral appliqué sur le segment d'extrémités 0 et x :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n} \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$$

et ainsi la fonction intégrée étant de signe constant

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{|x|}}{n!} \left| \int_0^x (x-t)^n \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

cette dernière quantité ayant pour limite 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On montre de la même façon que

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \mathrm{e}^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!}$$

ce qui permet aussi d'obtenir $\cos x$ et $\sin x$ en prenant les parties réelle et imaginaire (voir plus loin).

On souhaite généraliser cette formule à tout complexe z. Soit z un complexe que l'on écrit $z = x+iy$. On a

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$$

Or

$$\mathrm{e}^{iy} = \cos y + i \sin y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$$

puis par produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} \times \frac{(iy)^{n-p}}{(n-p)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p (iy)^{n-p} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

On obtient le développement en série entière de l'exponentielle complexe

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

Par substitution, on a aussi

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}\,,\ \forall z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{e}^{tz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n z^n}{n!}}$$

ainsi que

$$\text{Soit } a > 0, \text{ alors pour tout } x \text{ réel } a^x = \mathrm{e}^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n.$$

6 Développement en série entière : cas de la variable réelle

6.1 Généralités

6.1.1 Définition

Définition 6. *On dit qu'une fonction de la variable réelle définie au voisinage de 0 est développable en série entière en 0 s'il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon R avec $R \geqslant r$ telle que*

$$\forall x \in]-r, r[\,,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

6.1.2 Exemples

Rappelons les exemples déjà obtenus :

$$\forall x \in]-1, 1[\,,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

d'où

$$\forall x \in]-1, 1[\,,\ \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

et

$$\forall x \in]-1, 1[\,,\ \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

ainsi que

$$\forall x \in]-1, 1]\,,\ \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

On a aussi

$$\forall x \in]-1, 1]\,,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

et

$$\forall x \in [-1, 1[\,,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

6.2 Série de Taylor d'une fonction

Définition 7. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. On appelle série de Taylor de f la série entière*

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

THÉORÈME 23. *Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r,r[$. Alors la série de Taylor de f est convergente sur $]-r,r[$ et f est égale sur $]-r,r[$ à la somme de sa série de Taylor, c'est à dire*

$$\forall x \in]-r,r[\,,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Preuve :
Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r,r[$. Alors on sait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ avec pour tout entier p

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\cdots(n+p) a_{n+p} z^n$$

et $f^{(p)}(0) = p! a_p$. Ainsi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

et f est donc égale à la somme de sa série de Taylor en 0 sur $]-r,r[$. ★

COROLLAIRE 5. *Le développement en série entière d'une fonction développable en série entière est unique. On pourra donc identifier les coefficients d'un développement en série entière.*

6.3 Contre exemple

Il ne faut pas croire qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ soit forcément développable en série entière. On considère la fonction f définie pour $x \neq 0$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

et par $f(0) = 0$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

On montre par récurrence que l'on peut écrire pour $x \neq 0$

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

avec P_n un polynôme. En effet pour $n = 0$, $P_0 = 1$. Si pour un entier n on a

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

alors

$$f^{(n+1)}(x) = P_n'(\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{-1}{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \frac{2}{x^3} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

soit encore

$$f^{(n+1)}(x) = \left[P_n\left(\frac{1}{x}\right) \frac{2}{x^3} - P_n'\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x^2}\right] \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

de la forme

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

avec

$$P_{n+1} = 2X^3 P_n - X^2 P_n'$$

Alors pour tout n, on en déduit que

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$$

ce qui permet d'affirmer d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^\infty$ que f est infiniment dérivable en 0 avec $f^{(n)}(0) = 0$ et f de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur $\mathbb{R}$.

La série de Taylor de f à l'origine est la série entière nulle. Et pourtant f n'est pas nulle au voisinage de 0. Ainsi f n'est pas développable en série entière à l'origine.

6.4 Formule de Taylor avec reste intégral

La *formule de Taylor avec reste intégrale* permet de mieux préciser le « reste »par rapport à la somme partielle de Taylor :

THÉORÈME **24.** *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Preuve :
Par récurrence fini sur $i \in \{0, \dots, n\}$, on montre que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{i} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^i}{i!} f^{(i+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Pour $i = 0$, on a $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$.
Pour $i = 1$ (inutile pour la récurrence, mais indispensable pour bien comprendre la méthode), on écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x 1 \times f'(t)\mathrm{d}t \\ &= f(a) + [(t-x)f'(t)]_a^x - \int_a^x (t-x)f''(t)\mathrm{d}t \\ &= f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On suppose que pour un certain i de $\{0, \dots, n-1\}$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{i} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^i}{i!} f^{(i+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Alors en intégrant par parties

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(x-t)^i}{i!} f^{(i+1)}(t)\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(x-t)^{i+1}}{(i+1)!} f^{(i+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{i+1}}{(i+1)!} f^{(i+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{f^{(i+1)}(a)}{(i+1)!}(x-a)^{i+1} + \int_a^x \frac{(x-t)^{i+1}}{(i+1)!} f^{(i+2)}(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence. ★

On en déduit alors l'*inégalité de Taylor-Lagrange* :

Corollaire 6. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. Alors*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}(f)$$

où $M_{n+1}(f)$ désigne la borne supérieure de $|f^{(n+1)}|$.

Exemple :
La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut donc appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à tout ordre sur tout segment. Soit x réel quelconque ;

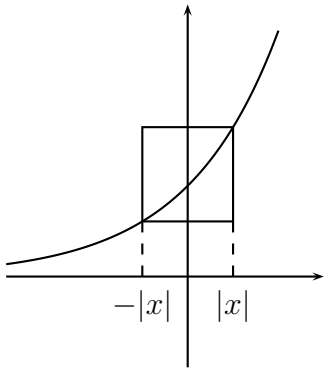


Figure 2 – Majoration de exp

on applique la formule sur $[0,x]$ ou $[x,0]$:

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^{|x|}$$

puisque sur $[0,x]$ ou $[x,0]$, exp majorée en valeur absolue par $\mathrm{e}^{|x|}$ (voir figure 2) et donc par comparaison, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$$

On montre de la même façon (c'est plus simple puisque qu'on borne sin et cos par 1) :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \cos(x).$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sin(x).$

6.5 Propriétés

Proposition 25. *Une combinaison linéaire ou un produit de deux fonctions développables en série entière est développable en série entière.*

Preuve :
Si f et g sont développables en séries entières, λ et μ des réels, alors il existe $r > 0$ et $r' > 0$, des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon $R \geqslant r$ et $R' \geqslant r'$ de sorte que

$$\forall x \in]-r, r[\,,\ f(x) = \sum a_n x^n \qquad \forall x \in]-r', r'[\,,\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

et ainsi en posant $r'' = \min(r, r') > 0$, on a

$$\forall x \in]-r'', r''[\,,\ \lambda f(x) + \mu g(x) = \sum (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$$

Ainsi $\lambda f + \mu g$ est développable aussi en série entière.

Pour le produit, on sait que par produit de Cauchy,

$$\forall x \in]-r'', r''[\,,\ (fg)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right] x^n$$

et ainsi fg est développable en série entière. ★

6.6 Développements en série entière usuels

On rappelle le développement fondamental issu de la somme géométrique

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[\,,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots}$$

d'où

$$\forall x \in]-1, 1[\,,\ \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

Par intégration du développement fondamental

$$\forall x \in]-1, 1[\,,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Par exemple, avec $x = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n}$$

On a donc aussi

$$\forall x \in]-1, 1[\,,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

On a aussi

$$\forall x \in]-1, 1[\,,\ \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

et par intégration

$$\forall x \in]-1, 1[\,,\ \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Si $t \in \mathbb{R}$, on sait que

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}\right) \qquad \sin(t) = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}\right)$$

avec

$$\mathrm{e}^{it} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n t^n}{n!} \qquad \mathrm{e}^{-it} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n i^2 t^n}{n!}$$

et ainsi

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}\,,\ \cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}}$$

et

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}\,,\ \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

Si $t \in \mathbb{R}$, on sait que

$$\mathrm{ch}\, t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}\right) \qquad \mathrm{sh}(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}\right)$$

avec

$$\mathrm{e}^{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \qquad \mathrm{e}^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!}$$

et ainsi

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}\,,\ \mathrm{ch}\, t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}}$$

et

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}\,,\ \mathrm{sh}\, t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

6.7 Utilisation des équations différentielles linéaires

On considère la fonction f définie par $f(x) = (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ fixé. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ (au moins, selon les valeurs de α). On a

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

et ainsi

$$f'(x) = \frac{\alpha}{1+x} f(x)$$

Ainsi f est la solution de l'équation différentielle sur $]-1,1[$

$$y' = \frac{\alpha}{1+x} y \quad (E)$$

prenant la valeur 1 en 0.

On cherche les solutions de (E) développables en série entière. Soit y développable en série entière, sur $]-r,r[$, notons

$$y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

sur $]-r,r[$. On a

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n-1}$$

y et solution de (E) si et seulement si

$$(1+x)y'=\alpha y$$

si et seulement si

$$(1+x)\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n-1}=\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

soit encore

$$\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n=\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n=\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+1)a_{n+1}+na_n-\alpha a_n]x^n=0$$

Par unicité du développement en série entière, y solution de (E) si et seulement si

$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\ a_{n+1}=\frac{\alpha-n}{n+1}a_n$$

soit encore

$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\ a_n=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}a_0$$

De plus la condition initiale $y(0)=1$ est équivalente à $a_0=1$. Ainsi y solution développable en série entière de (E) avec $y(0)=1$ si et seulement si

$$y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

• si $\alpha\notin\mathbb{N}$, le rayon de la série obtenue est 1 : en effet, a_n n'est pas nul, et pour $z\neq 0$,

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_nz^n}\right|=\frac{|\alpha-n||z|}{n+1}\longrightarrow|z|$$

ce qui assure que y définie une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, solution de (E) avec $y(0)=1$. Il s'agit donc de f par unicité dans le problème de Cauchy associé. Ainsi

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[\,,\ (1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n}$$

• Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, $(1+x)^\alpha$ est polynomiale, le développement en série entière est la fonction polynomiale elle-même : il est fini ; le rayon de la série est $+\infty$.

• Cas où $\alpha = \frac{1}{2}$, on précise les coefficients de manière générale :

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} &= \frac{1}{k!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right) \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{k!2^k}1\times 3\times 5\times\cdots\times(2k-3) \\
&= \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^k\times 2\times 4\times\cdots\times(2k-2)} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}}\frac{(2k)!}{k!(k-1)!(2k-1)(2k)} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}(2k-1)}\binom{2k}{k}
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\forall x\in]-1,1[\,,\ \sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.3\cdots(2n-5).(2n-3)}{2.4.\cdots(2n-2)(2n)}x^n$$

soit encore

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[\,,\ \sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n}$$

• Cas où $\alpha = -\frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} &= \frac{1}{k!}\frac{-1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right) \\
&= \frac{(-1)^k}{k!2^k}1\times 3\times 5\times\cdots\times(2k-1) \\
&= \frac{(-1)^k(2k)!}{2^k\times 2\times 4\times\cdots\times 2k} \\
&= \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!k!} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\binom{2k}{k}
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\forall x\in]-1,1[\,,\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n\frac{1.3\cdots.(2n-3).(2n-1)}{2.4.\cdots(2n-2)(2n)}x^n$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[\,,\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n}$$

On peut aussi bien sûr dériver le développement en série entière de $\sqrt{1+x}$:

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^{n-1}}{(2n-1)2^{2n}} \binom{2n}{n} x^{n-1}$$

et ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^{n-1}}{(2n-1)2^{2n}} \binom{2n}{n} x^{n-1}$$

que l'on ré-indexe

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(-1)^{n}}{(2n+1)2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} x^{n}$$

et que l'on simplifie par

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)}{(2n+1)2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(n+1)}{(2n+1)2^{2n+2}} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n! n!} \\ &= \frac{(n+1)}{2^{2n+2}} \frac{(2n+2)(2n)!}{(n+1)^2 n! n!} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}\end{aligned}$$

On compose par $-x^2$,

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^{2n}$$

et on intègre

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n}} \binom{2n}{n} x^{2n+1}$$

et aussi

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n}} \binom{2n}{n} x^{2n+1}$$

Remarques : les formules sont valides sur $]-1,1[$.

Cependant, dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$, si on considère la série de fonctions

$$\sum_{n\geqslant 2}^{+\infty} \underbrace{\frac{1\cdot 3\cdot (2n-3)}{2\cdot 4\cdot 2n} x^n}_{=f_n(x)}$$

nous avons si $x \in [-1,1]$,

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1\cdot 3\cdot (2n-3)}{2\cdot 4\cdot 2n} = a_n$$

et

$$a_n = \frac{(2n-2)!}{2^n n! 2^{n-1}(n-1)!} = \frac{n}{(2n-1)(2n)2^{2n-1}} \times \frac{(2n)!}{n!n!}$$

En utilisant la formule de Stirling,

$$\frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}}{2\pi n n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

et ainsi

$$a_n \sim \frac{2n}{\sqrt{\pi n}(2n-1)(2n)} \sim \frac{1}{2n\sqrt{\pi n}}$$

Ainsi la série de fonctions converge normalement sur $[-1,1]$. Sa somme est continue, ce qui permet d'appliquer la formule sur $[-1,1]$ et en particulier en -1 et 1 ce qui permet d'obtenir les résultats

$$\boxed{\forall x \in [-1,1]\,,\ \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n}$$

Pour $x = 1$:

$$\boxed{\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)2^{2n}} \binom{2n}{n} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\times 4} + \frac{1\times 3}{2\times 4\times 6} - \cdots}$$

et pour $x = -1$:

$$\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\times 4} + \frac{1\times 3}{2\times 4\times 6} + \cdots = 1}$$

Pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, on considère la série de fonctions

$$\sum_{n\geqslant 0} \underbrace{\frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n}_{=f_n(x)}$$

nous avons si $x \in [0,1]$ une série alternée,

$$|f_n(x)| = \frac{(2n)! \cdots}{2^{2n}(n!)^2} = a_n$$

En utilisant la formule de Stirling,

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} n! n!} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n} \mathrm{e}^{-2n}}{2\pi n n^{2n} \mathrm{e}^{-2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

et ainsi la suite $(|f_n(x)|) = (a_n |x|^n)$ converge vers 0.

De plus

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)(n+1)} = \frac{2n+1}{2(n+1)} < 1$$

et ainsi la suite (a_n) décroit, donc $(a_n |x|^n)$ aussi, vers 0.
On peut appliquer e critère spécial des séries alternées pour la majoration du reste

$$|R_n(x)| \leqslant a_{n+1}|x|^{n+1} \leqslant a_{n+1}$$

et ainsi $\| R_n \|_{\infty,[0,1]}$ converge vers 0.

Ainsi la série de fonctions converge uniformément sur $[0,1]$. Sa somme est continue, ce qui permet d'appliquer la formule sur $[0,1]$ et en particulier en 1 ce qui permet d'obtenir

$$\forall x \in]-1,1]\,,\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n$$

Pour $x = 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

7 Exercices

7.1 Rayon de convergence

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières
$$\sum z^n \qquad \sum \frac{z^n}{n!}$$
2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :
$$\sum_{n\geqslant 1} \ln(n) z^n \qquad \sum \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{n}\right) z^n \qquad \sum \operatorname{ch}(n) z^n$$
3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :
$$\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^n z^n \qquad \sum \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) z^n \qquad \sum \operatorname{sh}(n) z^n$$
4. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} p_n z^n$ avec p_n le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à n.
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n^\alpha z^n$.
6. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum P(n) z^n$ avec P un polynôme non nul à coefficients complexes.
7. (Centrale 2008) Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, que dire du rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n^2 z^n$?
8. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ avec
$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^n & \text{sinon} \end{cases}$$
9. Déterminer le rayon de convergence de $\sum z^{n^2}$ (z puissance n^2) et $\sum \dfrac{z^{n^2}}{n!}$.
10. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence $R > 0$ et $R' > 0$ respectivement. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n b_n z^n$?

7.2 Bornes de l'intervalle de convergence

11. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{1}{n} z^n$ et préciser le comportement aux bornes de l'intervalle de convergence.
12. Déterminer le rayon de la série entière de la variable réelle $\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) x^n$ et préciser le comportement aux bornes de l'intervalle de convergence.
13. Déterminer le rayon de la série entière de la variable réelle $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{n}\right) x^n$ et préciser le comportement aux bornes de l'intervalle de convergence.
14. Déterminer le rayon de la série entière de la variable réelle $\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{Arctan}(n) x^n$ et préciser le comportement aux bornes de l'intervalle de convergence.

7.3 Calculs de sommes

15. Pour $x \in]-1,1[$, justifier l'existence et calculer les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \sum_{n=p}^{+\infty} x^n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$$

ainsi que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (an+b)x^{n-1} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n+2)x^n$$

Pour cette dernière, écrire

$$n^2+n+2 = a(n+1)(n+2)+b(n+1)+c$$

16. On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n$$

1) Préciser le rayon de convergence de cette série entière.
2) Exprimer $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles pour $x > 0$ puis pour $x < 0$.

17. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} x^{n+2}$$

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant f.
2) Déterminer des réels a, b et c de sorte que pour tout entier n non nul

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$

3) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.
4) Obtenir le même résultat par une autre méthode.

18. (CCP 2000) Rayon et somme de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2n+1}$$

19. (CCP 2001) Existence et calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}$$

20. (Centrale 1999) Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

21. Pour $x \in [-1,1]$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$$

1) Montrer que f est continue sur $[-1,1]$.
2) Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ et préciser $f'(x)$ pour $-1 < x < 1$.
En déduire $f(x)$ pour $x \in]-1,1[$.
3) Autre méthode : décomposer $\frac{1}{n(n-1)}$ et calculer $f(x)$ pour $x \in]-1,1[$. Déterminer les valeurs de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

22. (Knopp) Montrer que
$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\cdots=1$$

23. (Knopp) Montrer que
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots=1$$

7.4 Développements en séries entières

24. Développer en série entière la fonction $x\mapsto \ln(1+x+x^2)$. Généraliser.

25. Développer en série entière la fonction $x\mapsto \sin x\cos^2 x$. On précisera le rayon de convergence.

26. 1) Montrer que $x\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. Exprimer les coefficients de ce développement à l'aide de factorielles.
2) En déduire que Arcsin est développable en série entière sur $]-1,1[$.
3) En déduire que
$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}$$

27. Développer en série entière $x\mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin x$.

28. Développer en série entière $x\mapsto \mathrm{Arctan}(1+x)$ et préciser le rayon de convergence. On pourra dériver la fonction.

29. Montrer que la fonction f définie par $f(0)=\frac{1}{2}$ et
$$\forall x\in\mathbb{R}^*\,,\ f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$$
est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

7.5 Séries entières et équations différentielles

30. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle
$$xy''-y=1$$

31. On considère $\psi : x\mapsto \mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.
1) Montrer qu'il existe des coefficients $(c_{2n+1})_n$ tels que pour tout x réel,
$$\psi(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_{2n+1}x^{2n+1}$$
et préciser c_{2n+1} sous la forme d'une somme.
2) Montrer qu'il existe une fonction f développable en série entière au voisinage de zéro vérifiant $f(0)=0$ et solution de l'équation différentielle $y'=2xy+1$.
3) En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}=2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

32. On considère l'équation différentielle $(E) : x^2y''+x(x+1)y'-y=0$.
1) Déterminer les solution développables en série entière de (E).
2) Exprimer ces solutions à l'aide des fonctions usuelles.

7.6 Oraux

33. (CCP PC 2007) Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière. Quelles propriétés possède une série entière sur son disque ouvert de convergence ? Déterminer le rayon de $\sum \operatorname{ch} nx^{3n+1}$ et calculer sa somme.

34. (CCP PC 2007) On envisage

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} x^{2n+1}$$

1) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2) Montrer que f est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle

$$(x^2 - 2)y' + xy + 2 = 0$$

3) En déduire une expression explicite de f.
4) La série converge-t-elle pour $x = R$?

7.7 Autres

35. Soit (a_n) une une suite de réels positifs décroissante de limite nulle. On suppose que la série $\sum a_n$ est divergente.
1) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est 1.
2) On note f la somme de cette série sur $]-1, 1[$. Montrer que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

8 Exercices corrigés

8.1 Rayon de convergence

Exercice 1.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières

$$\sum z^n \qquad \sum \frac{z^n}{n!}$$

☞ On revient à la définition. On a (z^n) bornée si et seulement si $|z| \leqslant 1$. Donc $R = 1$.

Pour la seconde, par la définition ou la règle de d'Almenbert. Par la définition, pour tout z, la suite $\frac{(z^n}{n!)}$ converge vers 0 et ainsi elle est bornée. Donc $R = +\infty$.

Exercice 2.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} \ln(n) z^n \qquad \sum \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{n}\right) z^n \qquad \sum \operatorname{ch}(n) z^n$$

☞ • Pour $n \geqslant 2$, on a

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \longrightarrow 1$$

et ainsi le rayon est 1. Remarque : on a (re)démontré que $\ln(n+1) \sim \ln n$.
• On sait que

$$\operatorname{Arcsin}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

Comme le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} z^n$ est 1, on en déduit que le rayon est 1.

• On a l'équivalent

$$\operatorname{ch} n = \frac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{2} \sim \frac{1}{2}\mathrm{e}^n$$

Or

$$\frac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}$$

et donc la série entière $\sum \operatorname{ch} n z^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Autre méthode, où l'on précise aussi la somme : on a

$$\sum \operatorname{ch} n z^n = \sum \frac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{2} z^n$$

Ainsi la série entière est somme deux deux séries entières

$$\sum (\mathrm{e}z)^n \qquad \sum \left(\frac{z}{\mathrm{e}}\right)^n$$

dont les rayon sont (sommes géométriques) $\frac{1}{\mathrm{e}}$ et e distincts. Ainsi la série est de rayon le minimum des deux, soit $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Exercice 3.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^n z^n \qquad \sum \mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right) z^n \qquad \sum \mathrm{sh}(n) z^n$$

☞ Pour la première, la suite $(\mathrm{e}^n z^n)$ est bornée si et seulement si $|ez| \leqslant 1$ et ainsi $R = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Pour la seconde, on a $\mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ et ainsi

$$R\left(\sum \mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right) z^n\right) = R\left(\sum \frac{1}{n} z^n\right) = 1$$

Pour la troisième, on a

$$\mathrm{sh}(n) \sim \frac{1}{2}\mathrm{e}^n$$

et ainsi

$$R\left(\sum \mathrm{sh}(n) z^n\right) = R\left(\mathrm{e}^n z^n\right) = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Exercice 4.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} p_n z^n$ avec p_n le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à n.

☞ On a pour $n \geqslant 2$, $1 \leqslant p_n \leqslant n$ et ainsi on a

$$1 = R\left(\sum 1 z^n\right) \geqslant R\left(\sum p_n z^n\right) \geqslant R\left(\sum n z^n\right) = 1$$

et donc le rayon est 1.

Exercice 5.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n^\alpha z^n$.

☞ Le rayon est 1, c'est un résultat du cours. Par la méthode de la règle d'Almenbert appliquée aux séries entières, on a

$$\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \longrightarrow 1$$

et ainsi $R = \frac{1}{1} = 1$.

Exercice 6.

Soit P un polynôme, déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum P(n)z^n$.

☞ Si $P = 0$, le rayon est infini.
Sinon on note $P = a_p X^p + \cdots + a_0$, $a_p \neq 0$, alors $P(n) \sim a_p n^p$ et ainsi $P(n)$ n'est pas nul à partir d'un certain rang, et

$$\frac{P(n+1)}{P(n)} \sim \frac{(n+1)^p}{n^p} \sim 1$$

Ainsi

$$\left|\frac{P(n+1)}{P(n)}\right| \longrightarrow 1$$

et donc d'après le critère de d'Alembert appliqué aux séries entières, le rayon de convergence la série entière $\sum P(n)z^n$ est égal à 1.

Exercice 7.

(Centrale 2008) Si R est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, que dire du rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n^2 z^n$?

☞ Notons R' le rayon de convergence de la série $\sum a_n^2 z^n$.
Pour $|z| < R$, la suite $(a_n z^n)$ est bornée. Alors la suite $(a_n^2 z^{2n})$ aussi soit encore $(a_n^2 (z^2)^n)$ bornée. Ainsi $R' \geqslant |z|^2$. On en déduit que $R' \geqslant R^2$ forcément.

Pour $|z| < R'$, la suite $(a_n^2 z^n)$ est bornée, donc $(|a_n|^2 |z|^n)$ bornée, et ainsi $(|a_n| \sqrt{|z|}^n)$ bornée et donc $R \geqslant \sqrt{|z|}$, soit $R^2 \geqslant |z|$. Ainsi $R^2 \geqslant R'$ forcément.

Finalement, $R' = R^2$.

Exercice 8.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ avec

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^n & \text{sinon} \end{cases}$$

☞ Nous avons formellement

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^{2n}} z^{2n} + \sum_{n\geqslant 0} 3^{n+1} z^{2n+1}$$

somme de deux séries entières de rayons distincts respectivement $\sqrt{4} = 2$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (règle de d'Alembert par exemple, cas lacunaire selon parité, d'où la racine carrée), et ainsi le rayon est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (minimum).

Exercice 9.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum z^{n^2}$ (z puissance n^2) et $\sum \dfrac{z^{n^2}}{n!}$.

☞ • On note R le rayon de convergence de la première série entière.

Pour $z = 1$, la suite $(z^{n^2}) = (1)$ est pas bornée et ainsi $R \geqslant 1$.

Si $|z| > 1$, comme $n^2 \geqslant n$, on a $|z|^{n^2} \geqslant |z|^n$ et ainsi la suite (z^{n^2}) n'est pas bornée. Donc $R \leqslant 1$.
On a donc $R = 1$.

• On note R' le rayon de convergence de la seconde série entière.
Si z non nul, on applique le critère de d'Almenbert à la série numérique, on a

$$r_n = \frac{\frac{|z|^{(n+1)^2}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^{n^2}}{n!}} = \frac{1}{n+1}|z|^{2n+1}$$

– si $|z| \leqslant 1$, r_n tend vers 0, et ainsi la série numérique converge (absolument).
– si $|z| > 1$, r_n tend vers $+\infty$, la série diverge.
Ainsi $R'' = 1$.

Exercice 10.

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence $R > 0$ et $R' > 0$ respectivement. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n b_n z^n$?

☞ Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $|z| < RR'$, on écrit $z = uv$ avec $|u| < R$ et $|v| < R'$, ce qui est possible de la façon suivante : on note w une racine carrée de z, et

$$u = w\sqrt{R/R'} \qquad v = w\sqrt{R'/R}$$

et ainsi

$$uv = w^2 = z \quad |u| = |w|\sqrt{R/R'} < \sqrt{RR'}\sqrt{R/R'} = R \quad |v| = |w|\sqrt{R'/R} < \sqrt{RR'}\sqrt{R'/R} = R'$$

alors $(a_n u^n)$ et $(b_n v^n)$ sont bornées et donc le produit $(a_n b_n z^n)$ aussi. Ainsi $R\left(\sum a_n b_n z^n\right) \geqslant RR'$.

L'égalité est possible, par exemple avec $a_n = b_n = 1$, les rayons sont tous égaux à 1.

L'inégalité peut-être stricte. En effet, prenons

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \qquad a_n b_n = 0$$

on a

$$R\left(\sum a_n z^n\right) = 1 \qquad R\left(\sum b_n z^n\right) = 1 \qquad R\left(\sum a_n b_n z^n\right) = +\infty$$

8.2 Comportement aux bornes de l'intervalle de convergence

Exercice 11.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{1}{n} z^n$ et préciser le comportement aux bornes de l'intervalle de convergence.

☞ Pour $z = 1$, la série diverge et pour $z = -1$, la série converge (critère spécial des séries alternées) et ainsi $R = 1$ et l'intervalle réel de convergence est $[-1, 1[$.

Exercice 12.

Déterminer le rayon de la série entière de la variable réelle $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \text{Arctan}\, \frac{1}{n^2} x^n$ et préciser le comportement aux bornes de l'intervalle de convergence.

☞ On notant $a_n = \text{Arctan}\, \frac{1}{n^2}$, on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{n^2}{(n+1)^2} \sim 1$$

Ainsi le rayon de la série est 1.

Comme

$$\text{Arctan}\, \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2} > 0$$

la série $\sum_{n \geqslant 1} \text{Arctan}\, \frac{1}{n^2}$ converge.

De plus la série $\sum (-1)^n \text{Arctan}\, \frac{1}{n^2}$ vérifie le critère spécial des séries alternées, et ainsi elle converge aussi.

Nous avons un intervalle réel de convergence qui est le segment $[-1, 1]$.

Exercice 13.

Déterminer le rayon de la série entière de la variable réelle $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \operatorname{Arctan}\frac{1}{n}x^n$ et préciser le comportement aux bornes de l'intervalle de convergence.

☞ $(\operatorname{Arctan}\frac{1}{n})$ étant bornée, le rayon vérifie $R \geqslant 1$. Comme

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} > 0$$

la série $\sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Arctan}\frac{1}{n}$ diverge (pour $z=-1$). On peut en déduire que le rayon est 1.

De plus la série $\sum(-1)^n \operatorname{Arctan}\frac{1}{n}$ vérifie le critère spécial des séries alternées, et ainsi elle converge.

On notant $a_n = \operatorname{Arctan}\frac{1}{n}$, on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{n}{n+1} \sim 1$$

Ainsi on retrouve ainsi que le rayon de la série entière est 1.

L'intervalle réel de convergence est donc $]-1,1]$.

Exercice 14.

Déterminer le rayon de la série entière de la variable réelle $\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{Arctan} nx^n$ et préciser le comportement aux bornes de l'intervalle de convergence.

☞ La suite $(\operatorname{Arctan} n)$ étant bornée, on a $R \geqslant 1$.

Comme la suite $(\operatorname{Arctan} n)$ converge vers $\frac{\pi}{2}$, la série numérique $\sum \operatorname{Arctan} n$ diverge grossièrement. Ainsi $R=1$.

La série numérique $\sum(-1)^n \operatorname{Arctan} n$ diverge aussi grossièrement. L'intervalle réel de convergence est ainsi l'intervalle ouvert $]-1,1[$.

8.3 Calculs de sommes

Exercice 15.

Pour $x \in]-1,1[$, justifier l'existence et calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \qquad \sum_{n=p}^{+\infty} x^n (p \in \mathbb{N}^*)$$

puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (an+b)x^{n-1}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n+2)x^n$$

Pour cette dernière, on écrira n^2+n+2 sous la forme $\alpha(n+1)(n+2)+\beta(n+1)+\gamma$.

☞ Chaque série entière a un rayon de convergence égale à un, en appliquant pour chacune la règle de d'Alembert où en invoquant le fait qu'elle sont de la forme $\sum P(n)x^n$ avec P un polynôme non nul (voir l'exercice sur le rayon de convergence d'une telle série entière). On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

ou aussi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

De même, on a

$$\sum_{n=p}^{+\infty} x^n = x^p \sum_{n=p}^{+\infty} x^{n-p} = x^p \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x^p}{1-x}$$

Autre technique, pour la suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n \\ &= x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' \\ &= x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} (an+b)x^{n-1} &= a\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} + b\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \\ &= \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{1-x} \\ &= \frac{-bx+b+a}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

Pour la dernière, on écrit

$$n^2+n+2=(n+1)(n+2)-2(n+1)+4$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+n+2)x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n-2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n+4\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\\ &= \left(\frac{1}{1-x}\right)''-2\left(\frac{1}{1-x}\right)'+\frac{4}{1-x}\\ &= \frac{2}{(1-x)^3}-\frac{2}{(1-x)^2}+\frac{4}{1-x}\\ &= \frac{2-2(1-x)+4(1-x)^2}{(1-x)^3}\\ &= \frac{4-6x+4x^2}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

Exercice 16.

On pose

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^n$$

1) Préciser le rayon de convergence de cette série entière.
2) Exprimer $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles pour $x>0$ puis pour $x<0$.

☞ Comme

$$\frac{\frac{1}{(2(n+1))!}}{\frac{1}{(2n)!}}=\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}\longrightarrow 0$$

on obtient par la règle de d'Alembert appliquée aux séries entières que le rayon est $+\infty$.

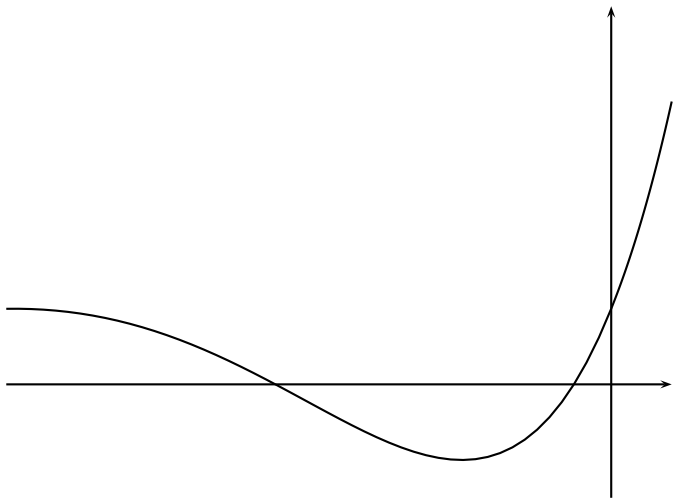
Si $x>0$ ou $x=0$, on écrit

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}[\sqrt{x}]^{2n}=\mathrm{ch}(\sqrt{x})$$

Si $x<0$ ou $x=0$, on écrit

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}(-1)^n[\sqrt{-x}]^{2n}=\cos(\sqrt{-x})$$

Graphiquement, on obtient (axe des x à échelle 1/5)



Exercice 17.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} x^{n+2}$$

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant f.
2) Déterminer des réels a, b et c de sorte que pour tout entier n non nul

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$

3) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.
4) Obtenir le même résultat par une autre méthode.

☞ 1) Comme on a

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}$$

le rayon est celui de la série entière $\sum \frac{1}{n^3} z^{n+2}$, c'est à dire 1.

2) On obtient

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$$

3) Ainsi nous avons sur $]-1,1[$, la séparation étant licite (toutes de rayon 1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^{n+2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2} x^{n+2} \\ &= -\frac{1}{2} x^2 \ln(1-x) + x \ln(1-x) + \frac{1}{2} \left(-\ln(1-x)) + x + \frac{x^2}{2} \right) \\ &= -\frac{x^2}{2} \ln(1-x) + x \ln(1-x) - \frac{1}{2} \ln(1-x) + \frac{x}{2} \end{aligned}$$

4) On remarque en dérivant terme à terme

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$$

puis

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^{n}$$

puis (pas nécessaire)

$$f'''(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$

et ainsi

$$f''(x)=-\ln(1-x)$$

que l'on intègre par une intégration par parties ($f'(0)=0$)

$$f'(x)=-\int^{x}\ln(1-t)\mathrm{d}t=-[(t-1)\ln(1-t)]^{x}+\int^{x}1\mathrm{d}t=-(x-1)\ln(1-x)+x$$

que l'on doit intégrer de nouveau ($f(0)=0$)

$$-\frac{(x-1)^2}{2}\ln(1-x)-\int^{x}\frac{t-1}{2}\mathrm{d}t+\frac{x^2}{2}$$

soit

$$-\frac{(x-1)^2}{2}\ln(1-x)-\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{x^2}{2}+\lambda$$

soit (nul en 0)

$$-\frac{x^2}{2}\ln(1-x)+x\ln(1-x)-\frac{1}{2}\ln(1-x)+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}$$

Exercice 18.

(CCP 2000) Rayon et somme de

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2n+1}$$

☞ Par equivalent des coefficients, on a

$$R\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2n+1}\right)=R\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2n}\right)=R\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n}\right)=1$$

Le point de départ est

$$-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$$

et en prenant la partie impaire (ce qui revient à prendre la partie impaire)

$$\frac{-\ln(1-x)+\ln(1+x)}{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Si $x\geqslant 0$, on applique à $\sqrt{x}$,

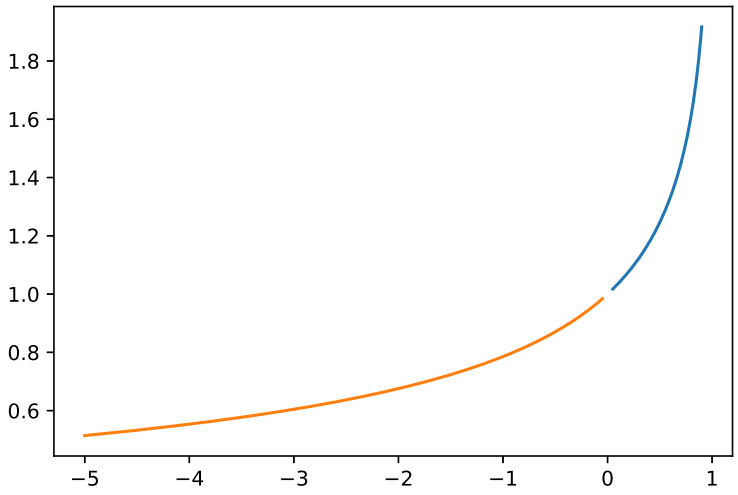
$$\frac{-\ln(1-\sqrt{x})+\ln(1+\sqrt{x})}{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{x}\frac{x^n}{2n+1}$$

et ainsi si $x>0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}=\frac{\ln(1+\sqrt{x})-\ln(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

Si $x<0$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{-x}^{2n}}{2n+1}\\&=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{-x}^{2n+1}}{2n+1}\\&=\frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}\end{aligned}$$



Exercice 19.

(CCP 2001) Existence et calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)2^n}$$

☞ On considère la série entière $\sum \frac{1}{n(n+1)}x^n$, qui est de rayon 1 puisque

$$R\left(\sum_{\frac{1}{n(n+1)}} x^n\right) = R\left(\sum_{\frac{1}{n^2}} x^n\right) = 1$$

La somme cherchée existe donc et est égale à $f(1/2)$. On cherche alors à reconnaître la fonction f sur $]-1,1[$. On a en décomposant la fraction classique, si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n \\ &= -\ln(1-x) - \frac{1}{x}(-\ln(1-x) - x) \\ &= -\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + 1 \end{aligned}$$

et ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n} = f(1/2) = ln(2) - 2\ln(2) + 1 = 1 - \ln(2).$$

Exercice 20.

(Centrale 1999) Convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

☞ On peut étudier en fait les trois séries suivantes

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}$$

] Ce sont des séries lacunaires. Elles sont de rayon infini, en utilisant d'Alembert adapté. La première est la dérivée de la seconde, elle même dérivée de la troisième.
C'est une généralisation des formules connues sur $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

associée en fait aux racines carrées de 1, -1 et 1.

On utilise les racine cubiques de l'unité : $1, j, j^2$ ainsi que leurs propriétés. On sait que pour tout complexe z, $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ et ainsi

$$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{jx} + \mathrm{e}^{j^2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 + j^n + j^{2n})x^n}{n!} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{jx} + \mathrm{e}^{j^2x}}{3}$$

d'où en intégrant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}^{jx}}{j} + \frac{\mathrm{e}^{j^2x}}{j^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^x + j^2\mathrm{e}^{jx} + j\mathrm{e}^{j^2x}\right)$$

Remarque : c'est donc la généralisation à l'ordre 3 de

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) \qquad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$$

les racines carrées de 1 étant -1 et 1. On peut généraliser aux racines n^{e} de l'unité et obtenir que si $p \geqslant 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{pn}}{(pn)!} = \frac{1}{p}\sum_{u \in \mathbb{U}_p} \mathrm{e}^{ux}$$

Exercice 21.

Pour $x \in [-1, 1]$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$$

1) Montrer que f est continue sur $[-1, 1]$.
2) Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$ et préciser $f'(x)$ pour $-1 < x < 1$.
En déduire $f(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.
3) Autre méthode : décomposer $\frac{1}{n(n-1)}$ et calculer $f(x)$ pour $x \in]-1, 1[$. Déterminer les valeurs de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

☞ On pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ sur $[-1, 1]$ pour $n \geqslant 2$ et on utilise la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 2} f_n$.

1) Pour $x \in [-1, 1]$, nous avons

$$\left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n\right| \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$$

et ainsi $\| f_n \|_{\infty,[-1,1]} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$. On en déduit la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} f_n$ sur $[-1,1]$, et donc aussi la convergence uniforme, et comme les fonctions f_n sont toutes continues sur $[-1,1]$, on obtient l'existence et la continuité de f sur $[-1,1]$.

2) Dans cette question, on utilise le fait que f est une série entière, de rayon $R \geqslant 1$ forcément d'après la question précédente, et ainsi f est de classe $mathcalC^\infty$ sur $]-1,1[$ de façon sûre, et on peut dériver terme à terme, et ainsi

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} = \ln(1+x)$$

On déduit alors f par intégration par parties, en ajustant la constante d'intégration sachant que $f(0) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= [t\ln(1+t)]^x - \int^x \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t + c \\ &= x\ln(1+x) - \int^x \frac{t+1-1}{1+t}\mathrm{d}t + c \\ &= x\ln(1+x) - x + \ln(1+x) \end{aligned}$$

mais ceci sur $]-1,1[$ uniquement, attention.

3) Nous avons la décomposition classique

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

et ainsi pour $x \in]-1,1[$, on reconnaît (les rayons des séries valent 1)

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = x\ln(1+x) + \ln(1+x) - x$$

Comme f est continue en 1 et -1, on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x\ln(1+x) - x + \ln(1+x) = 2\ln(2) - 1$$

et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = f(-1) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x\ln(1+x) - x + \ln(1+x)$$

limite qui existe donc forcément. On se doit de lever les indéterminations, on a en fait

$$x\ln(1+x) + \ln(1+x) = (x+1)\ln(1+x) = u\ln u \underset{x\to -1}{\longrightarrow} 0$$

et ainsi

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = f(-1) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x\ln(1+x) - x + \ln(1+x) = 1$$

On peut vérifier autrement ce calcul avec le télescopage classique

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} = 1 - \frac{1}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Exercice 22 (Knopp).

Montrer que

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\cdots=1$$

☞ On remarque que

$$\mathrm{e}^x-1=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$$

Ainsi f est une fonction développable en série entière, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ (une fois le prolongement continue en 0 effectué), et on a

$$f'(x)=\frac{x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1}{x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$$

et donc

$$f'(1)=1=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}$$

Exercice 23 (Knopp).

Montrer que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdots4}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots=1$$

☞ Montrons que

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1\cdot3\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdot2n}=1$$

On sait que si $x\in]-1,1[$,

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1\cdot3\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdot2n}x^n$$

En prenant $x=1$, on pourrait conclure ; mais ce n'est pas possible pour l'instant, attention.

Cependant, si on considère la série de fonctions

$$\sum_{n\geqslant2}^{+\infty}\underbrace{\frac{1\cdot3\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdot2n}x^n}_{=f_n(x)}$$

nous avons si $x\in[-1,1]$,

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1\cdot3\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdot2n}=a_n$$

et

$$a_n = \frac{(2n-2)!}{2^n n! 2^{n-1}(n-1)!} = \frac{n}{(2n-1)(2n)2^{2n-1}} \times \frac{(2n)!}{n!n!}$$

En utilisant la formule de Stirling,

$$\frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}}{2\pi n n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

et ainsi

$$a_n \sim \frac{2n}{\sqrt{\pi n}(2n-1)(2n)} \sim \frac{1}{2n\sqrt{\pi n}}$$

Ainsi la série de fonctions converge normalement sur $[-1,1]$. Sa somme est continue, ce qui permet d'appliquer la formule sur $[-1,1]$ et en particulier en 1 et d'obtenir le résultat.

8.4 Développements en séries entières

Exercice 24.

Développer en séries entières en 0 la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(1+x+x^2)$$

☞ **Une solution peu efficace** : la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = \frac{2x+1}{1+x+x^2}$$

f' est donc une fonction rationnelle, on la décompose dans $\mathbb{C}$:

$$f'(x) = \frac{a}{x-j} + \frac{b}{x-j^2}$$

On a alors $a = (x-j^2)f'(x)(j^2) = \frac{1+2j^2}{j^2-j} = \frac{j^2-j}{j^2-j} = 1$ et $b = (x-j)f'(x)(j) = \frac{1+2j}{j-j^2} = \frac{j-j^2}{j-j^2} = 1$. Ainsi

$$f'(x) = \frac{1}{x-j} + \frac{1}{x-j^2}$$

On écrit alors pour $|x|<1$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{-j}\frac{1}{1-\frac{x}{j}} + \frac{1}{-j^2}\frac{1}{1-\frac{x}{j^2}} \\
&= -j^2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{j}\right)^n - j\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{j^2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[-\frac{j^2}{j^n} - \frac{j}{j^{2n}}\right]x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-j^2-j)x^{3n} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-j-j^2)x^{3n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1-1)x^{3n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n} + \sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n+2}
\end{aligned}$$

d'où par intégration (on a $f(0)=0$) :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2}-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+3}}{3n+3}$$

que l'on écrire

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\frac{x^n}{n}\qquad\text{avec } a_n=\begin{cases}-2 & \text{si } n=0 \bmod 3\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$$

Et la solution rapide et élégante :

$$\begin{aligned}f(x)&=\ln\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right)=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)\\&=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\end{aligned}$$

Exercice 25.

Développer en série entière la fonction $x\mapsto \sin x\cos^2 x$. On précisera le rayon de convergence.

☞ Bon courrage pour procéder avec des produits de Cauchy !
On linéarise, ici avec les formules trigonométriques (sinon, avec les formules d'Euler), on a

$$\begin{aligned}f(x)=\sin(x)\cos^2(x)&=\sin(x)\frac{1+\cos(2x)}{2}\\&=\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{1}{2}\sin(x)\cos(2x)\\&=\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{1}{4}(\sin(3x)-\sin(x))\\&=\frac{1}{4}\sin(x)+\frac{1}{4}\sin(3x)\end{aligned}$$

Or on sait que

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

et donc

$$\sin(3x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Ainsi

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1+3^{2n+1}}{4(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Exercice 26.

1) Montrer que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. Exprimer les coefficients de ce développement à l'aide de factorielles.
2) En déduire que Arcsin est développable en série entière sur $]-1,1[$.
3) En déduire que

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}$$

☞ • Cas où $\alpha = -\frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} &= \frac{1}{k!}\frac{-1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right) \\
&= \frac{(-1)^k}{k!2^k} 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2k-1) \\
&= \frac{(-1)^k(2k)!}{2^k\times 2\times 4\times\cdots\times 2k} \\
&= \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!k!} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\binom{2k}{k}
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\forall x\in]-1,1[\,,\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n\frac{1.3\cdots.(2n-3).(2n-1)}{2.4.\cdots(2n-2)(2n)}x^n$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[\,,\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n}$$

On compose par $-x^2$,

$$\forall x\in]-1,1[\,,\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^{2n}$$

et on intègre

$$\forall x\in]-1,1[\,,\ \operatorname{Arcsin} x = x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)2^{2n}}\binom{2n}{n}x^{2n+1}$$

Il faudrait appliquer la formule pour $x=1$, ce que l'on ne peut pas faire pour l'instant. On considère la série de fonctions continues $\sum f_n$ sur $[-1,1]$ avec

$$f_n(x) = \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}\binom{2n}{n}x^{2n+1}$$

Nous avons

$$\| f_n \|_{\infty,[-1,1]} = \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

et avec la formule de Stirling

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}}{2\pi n n^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}2^{2n}}$$

et donc

$$\| f_n \|_{\infty,[-1,1]} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}n\sqrt{n}}$$

ce qui assure la convergence normale de la série de fonctions sur $[-1,1]$, avec une somme sur $[-1,1]$ continue, d'où des passages à la limite dans la somme autorisés en -1 et en 1 (cf cours). Ainsi en 1, nous avons

$$\text{Arcsin}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 27.

Développer en série entière $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$.

☞ Nous utilisons une fonction à valeurs complexes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-x}\sin x &= \Im m\left(\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{ix}\right)\\
&= \Im m\left(\mathrm{e}^{x(i-1)}\right)\\
&= \Im m\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(i-1)^n\frac{x^n}{n!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\Im m((i-1)^n)\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

Or $i-1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{4}}$ et ainsi $(i-1)^n = 2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{\frac{3in\pi}{4}}$ d'où

$$\mathrm{e}^{-x}\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{\frac{n}{2}}\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}$$

soit encore en distinguant $n = 4k$, $n = 4k+1$, $n = 4k+2$ et $n = 4k+3$

$$\mathrm{e}^{-x}\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{3k}2^{2k}\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} + (-1)^{3k+1}\sum_{k=0}^{+\infty}2^{2k+1/2}\frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!} + (-1)^{3k}\sum_{k=0}^{+\infty}2^{2k+1}\frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!}$$

On peut aussi faire un produit de Cauchy, fastidieux, en faisant attention au caractère lacunaire du développement de sin et obtenir des égalités sur les coefficients. On a

$$\mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

avec

$$b_{2n}=0 \qquad b_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

Alors sur $\mathbb{R}$, par produit de Cauchy,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

avec pour tout n,

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}=\sum_{\substack{k=0\\k=2p+1}}^{n} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\times\frac{(-1)^{n-2p-1}}{(n-2p-1)!}=\sum_{\substack{k=0\\k=2p+1}}^{n} \frac{(-1)^{n-p-1}}{(2p+1)!}\times\frac{1}{(n-2p-1)!}$$

et on doit avoir

$$c_{4n}=0 \qquad c_{4n+1}=(-1)^{3n}\frac{2^{2n}}{(4n+1)!} \qquad c_{4n+2}=(-1)^{3n+1}\frac{2^{2n+1/2}}{(4n+2)!} \qquad c_{4n+3}=(-1)^{3n}\frac{2^{2n+1}}{(4n+3)!}$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}
c_{4n} &= \sum_{\substack{k=0\\k=2p+1}}^{4n} \frac{(-1)^{4n-p-1}}{(2p+1)!(4n-2p-1)!}\\
&= \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)!(4n-2p-1)!}\\
&= \frac{1}{(4n)!}\sum_{p=0}^{2n-1}(-1)^{p+1}\frac{(4n)!}{(2p+1)!(4n-(2p+1))!}\\
&= \frac{1}{(4n)!}\sum_{p=0}^{2n-1}(-1)^{p+1}\binom{4n}{2p+1}
\end{aligned}$$

la somme devant être nulle, somme alternée des coefficients de Newton d'ordre impair de niveau $4n$. Par exemple si $n=1$, les coefficients de Newton de niveau 4 sont

$$1,4,6,4,1$$

et la somme alternée des impairs est $4-4=0$. Pour $n=2$, les coefficients de Newton de niveau 4 sont

$$1,8,28,56,70,56,28,8,1$$

et la somme alternée des impairs est $8-56+56-8=0$. C'est un peu normal par la symétrie des coefficients de Newton ! Il faudrait l'établir proprement.
Maintenant, un qui doit être non nul :

$$\begin{aligned}
c_{4n+3} &= \sum_{\substack{k=0\\k=2p+1}}^{4n+3} \frac{(-1)^{4n+3-p-1}}{(2p+1)!(4n+3-2p-1)!}\\
&= \sum_{p=0}^{n+1} \frac{(-1)^{p}}{(2p+1)!(4n+3-2p-1)!}\\
&= \frac{1}{(4n+3)!}\sum_{p=0}^{n+1}(-1)^{p}\binom{4n+3}{2p+1}
\end{aligned}$$

Par exemple, si $n=1$, les coefficients de Newton de niveau $7=4\times 1+3$ sont

$$1,7,21,35,35,21,7,1$$

et la somme alternée des impairs de niveau 7 est bien

$$7-35+21-1=-8=(-1)^1 2^3$$

Exercice 28.

Développer en série entière $x\mapsto \text{Arctan}(1+x)$ et préciser le rayon de convergence. On pourra dériver la fonction.

☞ On pose $f(x)=\text{Arctan}(1+x)$ sur $\mathbb{R}$, dérivable avec

$$f'(x)=\frac{1}{1+(1+x)^2}=\frac{1}{2+2x+x^2}$$

Le discriminant de x^2+2x+2 est -4, les racines sont $-1-i$ et $-1+i$, et on obtient la décomposition

$$\frac{1}{x^2+2x+2}=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{x+1-i}-\frac{1}{x+1+i}\right]$$

de type $\frac{z-\overline{z}}{2i}$, c'est la partie imaginaire de z.

Si on le voit pas, on procède de manière directe. On fait alors apparaître les développements géométriques

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{x+1-i}-\frac{1}{x+1+i}\right]\\
&=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1-i}\times\frac{1}{1+\frac{x}{1-i}}-\frac{1}{1+i}\times\frac{1}{1+\frac{x}{1+i}}\right]\\
&=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(1-i)^n}-\frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(1+i)^n}\right]\\
&=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(1+i)^{n+1}x^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(1-i)^{n+1}x^n}{2^{n+1}}\right]\\
&=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\left[(1+i)^{n+1}-(1-i)^{n+1}\right]x^n
\end{aligned}$$

Or on a

$$(1+i)^{n+1}=\sqrt{2}^{n+1}\mathrm{e}^{(n+1)\pi/4}$$

et ainsi

$$\frac{1}{2i}\left[(1+i)^{n+1}-(1-i)^{n+1}\right]=\sqrt{2}^{n+1}\sin(n+1)\pi/4$$

Finalement

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\sin(n+1)\pi/4x^n$$

et en intégrant

$$\text{Arctan}(1+x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n2^{n/2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) x^n$$

Exercice 29.

Montrer que la fonction f définie par $f(0) = \frac{1}{2}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

☞ Si x non nul, on a

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

et ainsi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} x^{2(n-1)}$$

valide aussi si $x = 0$. Ainsi f est développable en série entière en 0 sur $\mathbb{R}$ tout entier, et elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

8.5 Séries entières et équations différentielles

Exercice 30.

Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$xy'' - y = 1$$

☞ Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$ avec

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On sait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

et

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1}$$

Alors f est solution de l'équation différentielle $xy'' - y = 1$ sur $]-R, R[$ si et seulement si

$$\forall x \in]-R, R[\,,\ \sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)na_{n+1} - a_n)x^n = 1$$

soit si et seulement si par unicité du développement en série entière

$$-a_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ a_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}a_n$$

Les conditions précédentes définissent pour $a_1 \neq 0$, une suite (a_n) à termes non nuls, avec

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n(n+1)} \longrightarrow 0$$

et ainsi par application du critère de d'Alembert, nous obtenons classiquement que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est infini.

Par contre, si $a_1 = 0$, nous obtenons que la suite (a_n) est nulle à partir du rang 1 et ainsi la fonction f est constante égale à -1.

On a en général

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n(n-1)}a_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)(n-1)(n-2)}a_{n-2} \\ &= \cdots = \frac{1}{n(n-1)^2(-2n)^2\cdots}a_2 \qquad\qquad = \frac{1}{n(n-1)^2(n-2)^2\cdots 2.1}a_1 \end{aligned}$$

soit

$$a_n = \frac{n}{(n!)^2}a_1$$

Ainsi les solutions développables en série entière sont les fonctions f définie par

$$f(x) = -1 + a_1\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n!)^2}x^n$$

toutes de rayon infini. Nous obtenons la solution particulière évidente $f = -1$ ainsi que toute une droite vectorielle de solutions de l'équation homogène, la droite vectorielle engendrée par la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n!)^2}x^n$.

Exercice 31.

On considère $\psi : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

1) Montrer qu'il existe des coefficients $(c_{2n+1})_n$ tels que pour tout x réel,

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{2n+1} x^{2n+1}$$

et préciser c_{2n+1} sous la forme d'une somme.

2) Montrer qu'il existe une fonction f développable en série entière au voisinage de zéro vérifiant $f(0) = 0$ et solution de l'équation différentielle $y' = 2xy + 1$.

3) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = 2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

☞ 1) On sait que sur $\mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} = \frac{x^n}{n!}$$

et ainsi

$$\mathrm{e}^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} = \frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}$$

que l'on peut intégrer

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

On effectue alors le produit de Cauchy avec

$$\mathrm{e}^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

soit

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

On note $\sum a_n x^n$ la première série et $\sum b_n x^n$ la seconde, $\sum c_n x$ le produit. Alors

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

On distingue les cas n pair et n impair :

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} a_k b_{2n+1-k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k=2p+1}}^{2n+1} a_k b_{2n+1-k} \\ &= \sum_{p=0}^{n} a_{2p+1} b_{2n-2p} = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} \end{aligned}$$

$$c_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} a_k b_{2n-k} = 0$$

puisque ψ est impaire (unicité des coefficients) ou en effectuant le calcul explicite

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} b_k a_{2n-k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k=2p}}^{2n} b_k a_{2n-k} \\ &= \sum_{p=0}^{n} b_{2p} a_{2n-2p} = 0 \end{aligned}$$

2) On considère y développable en série entière sur $]-R, R[= I$ avec

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et ainsi

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Alors y solution de $y' = 2xy + 1$ sur I si et seulement on a sur I

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 1$$

soit encore sur I

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_{n-1} x^n + 1$$

d'où par unicité du développement en série entière

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 1\,,\ (n+1)a_{n+1} = 2a_{n-1} \end{cases}$$

De plus , $y(0) = 0$ donne la condition $a_0 = 0$, et la relation de récurrence entraîne que $a_{2n} = 0$ par récurrence sur n. On obtient aussi que

$$a_{2n+1} = \frac{2}{2n+1} a_{2n-1}$$

et par récurrence

$$a_{2n+1} = \frac{2.\cdots.2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} a_1 \frac{2^n}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}$$

que l'on écrit

$$a_{2n+1} = \frac{2^n.2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}$$

Ainsi

$$y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

est la seule solution développable en série entière en 0 de $y' = xy + 1$ avec la condition initiale $y(0) = 0$. Le rayon de convergence est $R = +\infty$ puisque

$$\frac{\frac{2^{2(n+1)}(n+1)!}{(2(n+1)+1}}{\frac{2^{2n}n!}{(2n+1)!}} = \frac{4(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{2}{2n+3} \longrightarrow 0 = L$$

(mais attention, en apliquant la règle de d'Alembert adptée aux séries entières lacunaires : ici $R =$ "$\frac{1}{\sqrt{L}}$").

D'après le théorème de Cauchy, il y a une unique solution de $y' = xy + 1$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$. Or

$$\psi'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{-x^2}$$

puisque $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, et ainsi

$$\psi'(x) = 2x\psi + 1$$

et $\psi(0) = 0$. Ainsi par unicité de la solution par le théorème de Cauchy, nous avons en fait

$$\phi(x) = \mathrm{e}^{x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

et ainsi

$$c_{2n+1} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{2n}n!}{(2n+1)!}$$

soit finalement

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Exercice 32.

On considère l'équation différentielle $(E) : x^2y'' + x(x+1)y' - y = 0$.
1) Déterminer les solution développables en série entière de (E).
2) Exprimer ces solutions à l'aide des fonctions usuelles.

☞ 1) Soit y développable en série entière de rayon $R > 0$,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On a y de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I =]-R, R[$, et on peut dériver terme à terme, et ainsi

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1}$$

et

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

Ainsi on a

$$x^2y'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n$$

Alors y est solution de l'équation différentielle sur I si et seulement si on a sur I

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n+\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0$$

soit encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n+\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0$$

soit encore en fusionnant

$$\sum_{n=1}^{+\infty}[(n^2-1)a_n+(n-1)a_{n-1}]x^n-a_0=0$$

soit encore puisqu'il y a unicité des coefficients d'une série entière

$$a_0=0\qquad\forall n\geqslant 1\,,\,(n-1)[(n+1)a_n+a_{n-1}]=0$$

soit

$$a_0=0\qquad\forall n\geqslant 2\,,\,[(n+1)a_n+a_{n-1}]=0$$

soit les conditions $a_0=1$ et si $n\geqslant 2$,

$$a_n=-\frac{1}{n+1}a_{n-1}=\frac{-1}{n+1}\times\frac{-1}{n}a_{n-2}=\frac{-1}{n+1}\times\frac{-1}{n}\cdots a_2=\frac{-1}{n+1}\times\frac{-1}{n}\cdots\frac{-1}{3}a_1=\frac{2(-1)^{n-1}}{(n+1)!}a_1$$

soit si et seulement si (formule encore vraie si $n=1$)

$$y(x)=2a_1\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}x^n$$

Or le rayon de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}x^n$ est $+\infty$ puisque le rapport de deux coeffients successifs rang n et $n+1$ donne en module vu le calcul ci-dessus $\frac{1}{n+1}$ qui tend vers 0. Pour $x\neq 0$, on reconnaît

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}x^n=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{\mathrm{e}^{-x}-1+x}{x}$$

et 0 pour $x=0$. Ainsi les solutions développables en série entière en 0 sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$x\mapsto\lambda\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}x^n=\begin{cases}\lambda\frac{\mathrm{e}^{-x}-1+x}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

8.6 Oraux

Exercice 33 (CCP PC 2007).

Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.
Quelles propriétés possède une série entière sur son disque ouvert de convergence ?
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \operatorname{ch} n x^{3n+1}$ et déterminer sa somme.

☞ On pose $u_n = \operatorname{ch} n x^{3n+1}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\operatorname{ch} n+1}{\operatorname{ch} n} x^3 \sim \frac{\mathrm{e}^{n+1} x^3}{\mathrm{e}^n} \sim \mathrm{e} x^3$$

et ainsi le rayon de la série entière est $R = \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$. Pour $|x| < R$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{ch} n x^{3n+1} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^n x^{3n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n} x^{3n+1} \\ &= \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{e} x^3)^n + \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^3}{\mathrm{e}} \right)^n \\ &= \frac{x}{2} \left[\frac{1}{1 - \mathrm{e} x^3} + \frac{1}{\frac{x^3}{\mathrm{e}}} \right] \end{aligned}$$

Exercice 34.

(CCP PC 2007) On envisage

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} x^{2n+1}$$

1) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2) Montrer que f est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle

$$(x^2 - 2) y' + xy + 2 = 0$$

3) En déduire une expression explicite de f.
4) La série converge-t-elle pour $x = R$?

☞ 1) Attention, la série entière est lacunaire. Posons si $z \neq 0$, on applique la règle de d'Alembert directement sur la série numérique

$$u_n = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} z^{2n+1}$$

Alors

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n+1}{2n+3} z^2 \longrightarrow 2|z|^2$$

Ainsi si $|z|^2 < \frac{1}{2}$, c'est à dire $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, la série $\sum u_n$ converge.
Qi $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$, la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement).
Ainsi$R = \sqrt{2}$.

2) La fonction f est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme somme d'une série entière, sur $]-1,1[$ et on peut dériver terme à terme :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!(2n+1)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} x^{2n}$$

(on ne simplifie par $2n+1$, dangereux, cas $n=0$ pose problème dans l'écriture). Alors $(x^2-2)f'(x)+xf(x)+2$ est égal à

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!(2n+1)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} x^{2n+2} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!(2n+1)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} x^{2n+2} + 2\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!(2n+1)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} x^{2n+2} - 2\sum_{n=-1}^{+\infty} \frac{(n+1)!(2n+3)}{1\cdot 3\cdots(2n+3)} x^{2n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} x^{2n+2} + 2\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)(2n+3)} \left[(2n+1)(2n+3) - 2(n+1)(2n+3) + (2n+3)\right] x^{2n+2} - 2 + 2\\
&= 0
\end{aligned}$$

et ainsi f est bien solution de l'équation différentielle $(x^2-2)y' + xy + 2 = 0$, sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$.

3) Il s'agit donc de résoudre cette équation différentielle,

$$y' + \frac{x}{x^2-2} y' = -\frac{2}{x^2-2} = \frac{2}{2-x^2}$$

Pour l'équation homogène,

$$b(x) = \frac{x}{x^2-2} \qquad B(x) = -\frac{1}{2}\ln(2-x^2)$$

et les solutions (de l'équation homogène) sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln(2-x^2)} = \frac{\lambda}{\sqrt{2-x^2}}$$

Pour l'équation complète, par la variation de la constante

$$\frac{\lambda'(x)}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2}{2-x^2}$$

soit

$$\lambda'(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$$

soit

$$\lambda(x) = 2\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \lambda$$

Ainsi on peut écrire

$$f(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{2-x^2}} + 2\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$$

Pour fixer la valeur de la constante d'intégration λ, on a la condition initiale $f(0) = 0 = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ et ainsi $\lambda = 0$. Donc finalement

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} x^{2n+1} = 2 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}}$$

4) On a pour $x = \sqrt{2}$, la série en complétant le dénominateur en factorielle

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{n! 2^n n!}{(2n+1)!} \sqrt{2} 2^n = \sum a_n$$

et à l'aide de la formule de Stirling

$$a_n \sim \sqrt{2} 4^n \frac{(n!)^2}{(2n+1)(2n)!} \sim \frac{2\pi n \sqrt{2} 4^n \mathrm{e}^{-2n} n^{2n}}{(2n)\sqrt{4\pi n} \mathrm{e}^{-2n} (2n)^{2n}} \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}$$

et ainsi notre série numérique est divergente.

8.7 Autres

Exercice 35.

Soit (a_n) une une suite de réels positifs décroissante de limite nulle. On suppose que la série $\sum a_n$ est divergente.
1) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est 1.
2) On note f la somme de cette série sur $]-1, 1[$. Montrer que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

☞ 1) Comme la série $\sum a_n 1n$ est divergente, on a forcément $R \leqslant 1$.
D'autre part, comme (a_n) est convergente, elle est bornée, et ainsi $(a_n 1^n)$ bornée et donc forcément $R \geqslant 1$.
On en déduit que $R = 1$.

2) On peut définir f sur $]-1, 1[$.
Si $0 \leqslant x \leqslant y < 1$, on a pour tout n, $0 \leqslant x^n \leqslant y^n$ et ainsi $0 \leqslant f(x) \leqslant f(y)$. Ainsi f est croissante sur $[0, 1[$, et d'après le théorème de la limite monotone, f admet une limite finie ou infinie en 1^-.

Soit $x \in [0, 1[$, on a avec la positivité des termes, pour tout entier N,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \geqslant \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$$

Si f admettait une limite finie ℓ en 1^-, alors en passant à la limite en 1^- selon x, on obtient

$$\ell \geqslant \sum_{n=0}^{N} a_n$$

et on obtient une contradiction lorsque N tend vers $+\infty$.
Donc f n'a pas de limite finie en 1^-, et donc tend vers $+\infty$ en 1^-.

Par exemple, avec

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

et $f(0) = 1$.

3) La décroissance de (a_n) n'est pas utilisée (?), on pourrait dire avec cette décroissance que $\sum a_n(-1)^n$ converge.
Toujours avec cette décroissante, pour $-1 \leqslant x < 0$, la série $\sum a_n x^n$ est alternée, et vérifie le critère spécial, ce qui permet d'obtenir la majoration du reste

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leqslant a_{n+1}$$

et ainsi $\| R_n \|_{\infty,[-1,0]} \leqslant a_{n+1}$ et donc nous avons la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum a_n x^n$ sur $[-1, 0]$, ce qui permet d'obtenir que f définie continue sur $[-1, 0]$ avec

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et avec donc par continuité de f en 1 et échange somme infinie – limite, $f(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$.

9 Compléments hors programme

9.1 Fonctions développables en séries entières

9.1.1 Une condition suffisante

On a déjà vu pour la fonction exponentielle, ou exponentielle imaginaire, les fonctions sinus et cosinus que si les dérivées de f en un x fixé sont toutes bornées par la même constante (c'est tout de même très rare !), on obtient que f est égale à sa série de Taylor en 0 sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Nous allons donner une condition plus faible sur les dérivées de f conduisant au fait que f sera égale à sa série de Taylor en 0, mais sur un voisinage de 0 uniquement (ce qui implique que f est développable en série entière en 0 donc).

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de zéro, on peut écrire d'après la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t$$

On suppose qu'il existe $r > 0$, $K > 0$, $M > 0$ de sorte que

$$\forall x \in [-r, r]\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ |f^{(n)}(x)| \leqslant MK^n n!$$

alors

$$\left| f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant MK^n \left| \int_0^x (x-t)^n \mathrm{d}t \right| = \frac{MK^n |x|^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{Mr(K|x|)^n}{n+1}$$

On pose alors $\rho = \inf\left(r, \frac{1}{K}\right)$, si $|x| < \rho$, on a $K|x| < 1$ et ainsi $\frac{Mr(K|x|)^n}{n+1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On en déduit alors que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

et ainsi f est égale à sa série de Taylor sur $]-\rho, \rho[$, et donc f est développable en série entière en 0.

Théorème 26. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. On suppose qu'il existe des constantes $K > 0$, $M > 0$, $r > 0$ de sorte que*

$$\forall x \in [-r, r]\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ |f^{(n)}(x)| \leqslant MK^k n!$$

Alors f est développable en série entière en 0.

On remarquera que si la majoration n'est vraie qu'à partir d'un certain rang, on peut aussi conclure.

9.1.2 Une autre condition suffisante

Théorème 27. *Soit f une fonction (réelle) de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a, a[$ avec $a > 0$. On suppose que*

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in]-a, a[\,,\ f^{(n)}(x) \geqslant 0$$

(on dit que f est absolument croissante) Alors

$$\forall x \in]-a, a[\,,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n} x^n$$

et ainsi f développable en série entière en 0.

Preuve :
Soit $x \in]-a, a[$, on peut écrire d'après la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{=S_n(x)} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t}_{=R_n(x)}$$

Pour $x \in [0, a[$, la série de Taylor

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

est à termes positifs, la suite des sommes partielles est donc croissante. D'autre part, le reste intégral est positif et comme $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$, on a $S_n(x) \leqslant f(x)$. Ainsi la suite $(S_n(x))$ est croissante majorée : donc elle converge ; ainsi $(R_n(x))$ converge aussi, en décroissant.

Si $x \in]0, a[$, on a par changement de variable

$$R_n(x) = \int_0^1 \frac{(x-ux)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux) x \mathrm{d}u = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ux) \mathrm{d}u$$

et ainsi

$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ux) \mathrm{d}u$$

Comme $f^{(n+1)}$ est croissante, on a alors facilement par comparaison

$$0 < x < y \Longrightarrow 0 \leqslant \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$$

Ainsi

$$0 <\leqslant R_n(x) \leqslant R_n(y) \left(\frac{x}{y}\right)^n$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient que $(R_n(x))$ converge vers 0 puisque $0 < \frac{y}{x} < 1$. Ainsi pour $x \in [0, a[$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Si $x \in]-a, 0[$, de même

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ux) \mathrm{d}u$$

et ainsi

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ux) \mathrm{d}u$$

puis sachant que $f^{(n+1)}$ croissante

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ux) \mathrm{d}u \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(0) \mathrm{d}u = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0)$$

or $|x| \in]0, a[$, et on sait d'après le cas précédent que la série numérique

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)|x|^n}{n!}$$

converge et donc son terme général tend vers 0 et ainsi la suite $(R_n(x))$ converge vers 0 aussi. ★

9.2 Développement en série entière en 0 de la fonction tangente

Les théorèmes de compositions des fonctions développables en série entière en 0 ainsi que pour l'inverse sont délicats, contrairement aux théorème concernant les opérations somme, produit par un scalaire et produit (de Cauchy).

Nous allons tout de même montrer que la fonction tangente est développable en série entière en 0, avec un rayon de convergence $\frac{\pi}{2}$, en utilisant des méthodes analogues à celles utilisées dans le paragraphe précédent.

On sait que $\tan' = 1 + \tan^2 \geqslant 0$. Puis

$$\tan'' = 2\tan'\tan = 2\tan + 2\tan^3$$

et ainsi $\tan'' \geqslant 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On suppose que $\tan^{(n)}$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de puissances de tan, la puissance maximale étant $n+1$, c'est à dire

$$\tan^{(n)} = \sum_{i=0}^{n+1} a_i \tan^i$$

alors

$$\tan^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{n+1} i a_i \tan'\tan^{i-1} = \sum_{i=1}^{n+1} i a_i (1+\tan^2)\tan^{i-1}$$

et donc en séparant

$$\tan^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{n+1} i a_i \tan^{i-1} + \sum_{i=1}^{n+1} i a_i \tan^{i+1}$$

puis

$$\tan^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} (i+1) a_{i+1} \tan^i + \sum_{i=2}^{n+2} (i-1) a_{i-1} \tan^i$$

soit en regroupant

$$\tan^{(n+1)} = a_1 + 2a_2\tan + \sum_{i=2}^{n} ((i+1)a_{i+1} + (i-1)a_{i-1})\tan^i + n a_n \tan^{n+1} + (n+1)a_{n+1}\tan^{n+2}$$

qui est bien une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de puissance de tan, avec puissance maximum $n+2$, ce qui achève la récurrence.

Ainsi, on en déduit que $\tan^{(n)} \geqslant 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Prenons $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\tan(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{S_n(x)} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \tan^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

On a comme dans le paragraphe précédent, la suite $(S_n(x))$ croissante, majorée par $\tan x$ et donc elle converge. Ainsi la série de Taylor de tan a pour rayon R avec $R \geqslant \frac{\pi}{2}$. On note alors f sa somme, qui est donc définie au moins sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. À ce stade, on ne sait donc pas que $f = \tan$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On dérive alors n fois la relation

$$\tan' = 1 + \tan^2$$

soit par la formule de Leibniz pour $n \geqslant 1$,

$$\tan^{(n+1)} = (\tan^2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$$

ce qui permet d'obtenir en 0

$$\tan^{(n+1)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)}(0) \tan^{(n-k)}(0)$$

Or nous avons

$$\frac{f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tan^{(n)}(0)}{(n-1)!x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n+1)}(0)}{n!} x^n}$$

avec donc

$$\frac{\tan^{(n+1)}(0)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} \frac{\tan^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}$$

On reconnaît un produit de Cauchy, et ainsi (mettre à part le terme pour $n = 0$)

$$f'(x) = 1 + f^2(x)$$

d'où

$$\frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} = 1$$

puis

$$\text{Arctan } f(x) = x + \alpha$$

Or $f(0) = 0$, et ainsi $\alpha = 0$, d'où Arctan $f(x) = x$ et $f(x) = \tan x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi la fonction tan est développable en série entière en 0 avec un rayon de $\frac{\pi}{2}$.

Une autre méthode consiste à utiliser exclusivement la méthode du paragraphe précédent, en utilisant la formule de Taylor aux ordres impairs, avec des dérivées d'ordre impair qui sont toutes positives (voir par exemple le sujet E3A PC Mathématiques 2 – 2015)

9.3 Formule de Cauchy-Hadamard

9.3.1 Formule de Cauchy-Hadamard (version allégée)

On donne ici la version allégée [1]
On rappelle déjà la version allégée de la règle de Cauchy pour les séries numériques :

Proposition 28. *Soit $\sum a_n$ une série numérique. on suppose que*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

Alors :
– si $L < 1$, la série numérique $\sum a_n$ est convergente (absolument).
– si $L > 1$, la série numérique $\sum a_n$ diverge grossièrement.
– si $L = 1$, on ne peut rien conclure sans information supplémentaire.

1. la formule de Cauchy-Hadamard fait intervenir la notion de limite supérieure, qui existe toujours contrairement à la limite « classique », d'où l'intérêt

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

sachant que

$$\limsup(x_n) = \lim_{n \to +\infty} \downarrow \sup_{p \geqslant n} x_p$$

et que la suite $\left(\sup_{p \geqslant n} x_p\right)_n$ est une suite décroissante et que donc elle admet dans tous les cas une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Preuve :
• On suppose que $L < 1$. Prenons r avec $L < r < 1$. Il existe un rang N_0 à partir duquel

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant r$$

et ainsi $|a_n| \leqslant r^n$. On en déduit par comparaison à une série géométrique que la série $\sum |a_n|$ est convergente. Ainsi $\sum a_n$ est absolument convergente, donc convergente.

• On suppose que $L > 1$. Prenons r avec $1 < r < L$. Il existe un rang N_0 à partir duquel

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant r$$

et ainsi $|a_n| \geqslant r^n$. On en déduit que $|a_n|$ diverge vers $+\infty$. Ainsi $\sum a_n$ est grossièrement divergente.

• La série numérique $\sum 1$ est divergente et $(\sqrt[n]{1}) = (1)$ converge vers 1.
La série numérique $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente et on a

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln n^2} = \mathrm{e}^{\frac{-2\ln n}{n}} \longrightarrow 1$$

★

On applique cette règle de Cauchy aux séries entières :

Proposition 29. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \in [0, +\infty]$$

Alors $R = \frac{1}{L}$.

Preuve :
Il s'agit d'une application de la règle de Cauchy (hors programme) pour les séries numériques. Soit $z \neq 0$, on a

$$\sqrt[n]{|a_n z^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|z| \longrightarrow L|z|$$

Si $L = 0$, on obtient la convergence pour tout z non nul (il y a convergence aussi pour $z = 0$, bien sûr). Ainsi $R = +\infty$.
Si $L = +\infty$, on obtient la divergence grossière pour tout z non nul. Ainsi $R = 0$.
Sinon, en appliquant la règle de Cauchy à la série numérique $\sum a_n z^n$:
• si $L|z| < 1$ c'est à dire si $|z| < \frac{1}{L}$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est convergente. Ainsi $R \geqslant \frac{1}{L}$.
• si $L|z| > 1$ c'est à dire si $|z| > \frac{1}{L}$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est divergente. Ainsi $R \leqslant \frac{1}{L}$.
On en déduit que $R = \frac{1}{L}$. ★

9.3.2 Formule de Cauchy-Hadamard (version générale)

On commence par donner la règle de Cauchy générale pour les séries numériques :

Proposition 30. *Soit $\sum a_n$ une série numérique. on suppose que*

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

Alors :
– si $L < 1$, la série numérique $\sum a_n$ est convergente (absolument).
– si $L > 1$, la série numérique $\sum a_n$ diverge grossièrement.
– si $L = 1$, on ne peut rien conclure sans information supplémentaire.

Preuve :
• On suppose que $L < 1$. Prenons r avec $L < r < 1$. Il existe un rang N_0 à partir duquel

$$\sup_{p \geqslant n} \sqrt[p]{|a_p|} \leqslant r$$

et ainsi à partir du rang N_0

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant r$$

et ainsi $|a_n| \leqslant r^n$. On en déduit par comparaison à une série géométrique que la série $\sum |a_n|$ est convergente. Ainsi $\sum a_n$ est absolument convergente, donc convergente.

• On suppose que $L > 1$. Comme la suite $\sup_{n \geqslant p} \sqrt[p]{|a_p|})$ est décroissante,

$$\sup_{p \geqslant n} \sqrt[p]{|a_p|} \geqslant L > 1$$

et donc pour tout n, et ainsi il existe un indice p_n, $p_n \geqslant n$ avec $\sqrt[p_n]{|a_{p_n}|} \geqslant 1$, et donc $|a_{p_n}| \geqslant 1$. On en déduit que $|a_n|$ ne converge pas vers 0. Ainsi $\sum a_n$ est grossièrement divergente.
★

PROPOSITION **31.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose que*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Preuve :
On pose

$$L = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

• Si $L = 0$, prenons z non nul, comme la suite $(\sup_{p \geqslant n} a_p)$ est décroissante, il existe un rang N_0 à partir duquel

$$\sup_{p \geqslant n} \sqrt[p]{|a_p|} \leqslant \frac{1}{2|z|}$$

et ainsi à partir du rang N_0

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{2|z|}$$

d'où

$$|a_n z^n| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

ce qui permet d'en déduire que $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, donc convergente. On en déduit que $R = +\infty$.

• Si $L = +\infty$, prenons z non nul,

$$\sqrt[n]{|a_n z^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|z|$$

et ainsi

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = +\infty$$

et donc la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. Ainsi $R = 0$.

• On suppose que $0 < L < +\infty$. Alors

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = L|z|$$

On applique alors le critère de Cauchy à la série numérique $\sum a_n z^n$:
– si $L|z| < 1$, alors $\sum a_n z^n$ converge. Ainsi $R \geqslant \frac{1}{L}$.
– si $L|z| > 1$, la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. Ainsi $R \leqslant \frac{1}{L}$.
Finalement, on a $R = \frac{1}{L}$. ★

9.4 Théorème de continuité radiale d'Abel

Nous avons vu quelques situations et méthodes pour la convergence au bord du disque de convergence, avec sous certaines hypothèses, la convergence uniforme sur $[-R, 0]$, $[0, R]$, ou même normale sur $[-R, R]$ de la série entière réelle et ainsi la continuité de la somme sur ces domaines.

9.4.1 Théorème de continuité radiale d'Abel

On commence par une première version, avec un rayon de convergence 1 :

THÉORÈME 32. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1. On suppose que la série numérique $\sum a_n$ est convergente. Alors la somme S de la série entière est continue en 1 (et donc sur $]-1, 1]$); en d'autres termes,*

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Preuve :
La preuve se base sur le principe de la transformation d'Abel. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

et ainsi $a_n = S_n - S_{n-1}$ lorsque $n \geqslant 1$. La suite (S_n) étant convergente, elle est bornée et ainsi les séries

$$\sum S_n x^n \qquad \sum S_{n-1} x^n$$

sont de rayon supérieur à 1. Alors pour $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (S_n - S_{n-1}) x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} S_{n-1} x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^{n+1} \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n (x^n - x^{n+1}) - S_0 x \\
&= S_0(1-x) + (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^n \\
&= (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n
\end{aligned}$$

On note $S=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ la limite de la suite (S_n). On a

$$\begin{aligned} f(x)-S &= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n - S \\ &= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n - (1-x)S\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(S_n-S)x^n \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon>0$, il existe un rang N_0, $N_0\geqslant 1$ à partir duquel $|S_n-S|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$, et ainsi pour $x\in(0,1[$,

$$|f(x)-S|\leqslant(1-x)\sum_{n=0}^{N_0-1}|S_n-S|x^n+(1-x)\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=N_0}^{+\infty}x^n$$

soit

$$|f(x)-S|\leqslant(1-x)\sum_{n=0}^{N_0-1}|S_n-S|x^n+\frac{\varepsilon}{2}x^{N_0}$$

puis

$$|f(x)-S|\leqslant(1-x)\underbrace{\sum_{n=0}^{N_0-1}|S_n-S|}_{=K_{N_0}}+\frac{\varepsilon}{2}$$

Il existe $\eta>0$, de sorte que si $0<1-\eta<x<1$, $1-x\leqslant\frac{\varepsilon}{2(K+1)}$ et donc

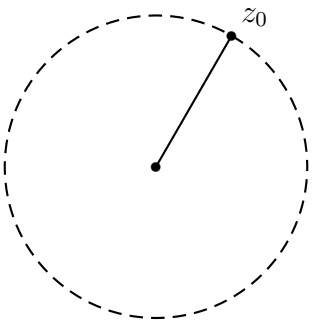
$$|f(x)-S|\leqslant\varepsilon$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)-S=0$ d'où le résultat. ★

On en déduit alors le théorème de continuité radial :

Théorème 33. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R. On suppose que pour $|z_0|=R$, que la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est convergente. Alors la somme S de la série entière entière complexe est continue sur le segment du plan complexe $[0,z_0]$; en d'autres termes,*

$$\lim_{t\to1^-}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(tz_0)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz_0^n$$



Preuve :
On pose

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (tz_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n t^n$$

de rayon 1, et on applique le résultat précédent puisque la série converge pour $t = 1$. ★

Cela permet de généraliser le passage à la limite, vu à l'aide du critère spécial des séries alternées, par exemple dans

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

lorsque x tend vers 1.

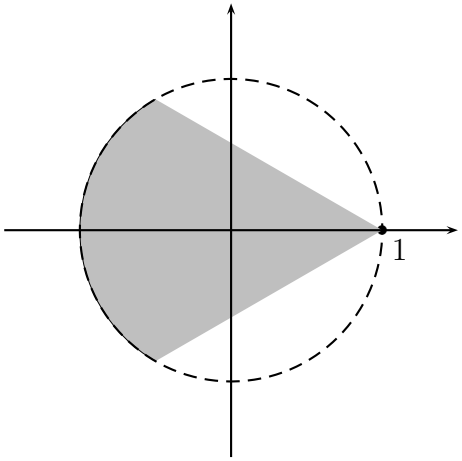
9.4.2 Complètement hors programme : Théorème de continuité angulaire de Stolz

On généralise la situation précédente.

THÉORÈME **34.** *On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ converge en 1. Alors on a*

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in S}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

avec S le secteur angulaire délimité comme ci-dessous :



ou tout autre dommaine défini par l'intersection de S avec un voisinage de 1.

Preuve :
Soit $z \in D$, on a comme dans les preuves ci-dessus

$$f(z) - S = (1-z)\sum_{n=0}^{+\infty}(S_n - S)z^n$$

avec $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

Prenons $z \in D(0,1)$ pour l'instant, une constante $\alpha > 0$, soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang N_0, $N_0 \geqslant 1$ à partir duquel $|S_n - S| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\alpha}$, et ainsi pour $z \in D(0,1)$,

$$|f(z) - S| \leqslant |1-z| \sum_{n=0}^{N_0-1} |S_n - S||z|^n + |1-z|\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=N_0}^{+\infty}|z|^n$$

soit

$$|f(z) - S| \leqslant |1-z| \sum_{n=0}^{N_0-1} |S_n - S| + \frac{\varepsilon}{2}|z|^{N_0}\frac{|1-z|}{1-|z|}$$

puis

$$|f(z) - S| \leqslant |1-z| \underbrace{\sum_{n=0}^{N_0-1} |S_n - S|}_{=K_{N_0}} + \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{|1-z|}{1-|z|}$$

Il existe $\eta = \frac{\varepsilon}{2(K+1)N_0} > 0$, de sorte que si $|1-z| \leqslant \eta$, on ait $|1-z| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(K+1)N_0}$ et donc

$$|f(z) - S| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2\alpha} \times \frac{|1-z|}{1-|z|}$$

On pourra en fait conclure sur tout domaine D de sorte que $1 \in \overline{D}$ sur lequel on peut majorer $\frac{|1-z|}{1-|z|}$ par la constante α. ★

Sur le domaine D, $z = 1 - re^{i\theta}$, $|\theta| \leqslant \theta_0$, $|1-z| = r$, et

$$|z|^2 = (1 - r\cos\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta = 1 + r^2 - 2r\cos\theta$$

et ainsi la condition $|z| < 1$ donne la condition $r < 2\cos\theta$, et alors sur le domaine D, on a

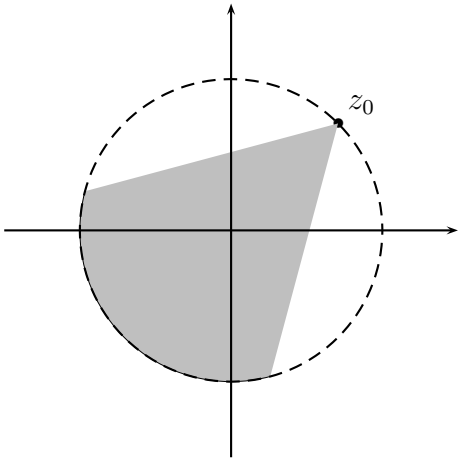
$$\frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{r}{1-\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}} \leqslant r\frac{1+\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}}{2+r^2-2r\cos\theta} \qquad \leqslant \frac{2+r}{r-2\cos\theta} \leqslant 4$$

On choisit notre constante α laissée en attente en prenant $\alpha = 4$.
Par rotation et dilatation, on montre de même :

THÉORÈME 35. *On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ converge en $z_0 \neq 0$. Alors on a*

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in S}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

avec S le secteur angulaire délimité comme ci-dessous :



ou tout autre dommaine défini par l'intersection de S avec un voisinage de 1.