Devoir n°3

L'objectif de ce problème n'est pas la résolution complète des équations différentielles proposées, mais l'étude de certaines de leurs solutions définies sur différents intervalles.
On rappelle qu'on appelle solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur un intervalle I, toute application y, définie sur I et deux fois dérivables sur I, vérifiant l'équation différentielle pour tout x de I.

Soit $p \in \mathbb{N}$, on s'intéresse aux équations différentielles

$$(E_p) \qquad x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

et

$$(E'_p) \quad x^2z'' + x(2p+1)z' + x^2z = 0$$

1. Soient y et z deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, vérifiant la relation
$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ y(x) = x^p z(x)$$
Montrer que y est solution de (E_p) sur $]0, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, 0[$ si et seulement si z est solution de (E'_p) sur $]0, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, 0[$).
2. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note $z(x)$ sa somme.
   (a) Établir les relations que doivent vérifier les coefficients a_n de la série entière pour que z soit solution de (E'_p) sur $]-R, R[$.
   (b) Vérifier que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_{2n+1} = 0$, et exprimer les coefficients a_{2n} en fonction de n, du paramètre p et de a_0.
   (c) Démontrer que le rayon de convergence de la série entière déterminée précédemment vaut $R = +\infty$.
3. Démontrer que pour toute valeur donnée à $a_0 \in \mathbb{R}$, la série
$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n p!}{2^{2n} n!(n+p)!} a_0 x^{2n}$$
est solution de (E'_p) sur $\mathbb{R}$.
4. On considère la série entière
$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n+p} n!(n+p)!} x^{2n+p}$$
   (a) À l'aide de la question 3), justifier que le rayon de convergence de cette série vaut $R = +\infty$. On note désormais J_p la somme de cette série vérifiant donc
$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+p)!} x^{2n}$$

(b) Déduire des questions 1) et 3) que J_p est une solution de (E_p) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

(c) Expliquez pourquoi J_p est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que J_p est une solution de (E_p) sur $\mathbb{R}$; on pourra distinguer le cas $p = 0$.

5. Démontrer la relation suivante :

$$\forall p \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^*\,,\ J_{p+1}(x) = \frac{pJ_p(x)}{x} - J_p'(x).$$

Fin

1. Soient y et z deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, vérifiant la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\; y(x) = x^p z(x)$$

et I l'intervalle $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$. On a alors y deux fois dérivable sur I si et seulement si z deux fois dérivable sur I par opération puisque que sur I on a

$$y = x^p z \iff z = x^{-p} y$$

On a alors

$$y'(x) = px^{p-1}z(x) + x^p z'(x) \qquad y''(x) = p(p-1)x^{p-2}z(x) + 2px^{p-1}z'(x) + x^p z''(x)$$

Alors y est solution de (E_p) sur I si et seulement si

$$x^2(p(p-1)x^{p-2}z(x) + 2px^{p-1}z'(x) + x^p z''(x)) + x(px^{p-1}z(x) + x^p z'(x)) + (x^2 - p^2)x^p z(x) = 0$$

soit en simplifiant et en divisant par x^{p+1}

$$xz''(x) + (2p+1)z'(x) + xz(x) = 0$$

si et seulement si z est solution de (E'_p) sur I.

2. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note $z(x)$ sa somme.

(a) La fonction z est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et on a

$$z'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \qquad z''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

La série entière z est solution de (E'_p) sur $]-R, R[$ si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + (2p+1)\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

soit encore

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + (2p+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n = 0 = 0$$

soit les conditions par unicité des coefficients d'un développement en série entière

$$\begin{cases} (2p+1)a_1 = 0 \\ \forall n \geqslant 2\,,\; a_n(n(n-1) + (2p+1)n) + a_{n-2} = 0 \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \geqslant 2\,,\; n a_n(n+2p) + a_{n-2} = 0 \end{cases}$$

ce qui donne les conditions

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \geqslant 2\,,\; a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)} \end{cases}$$

soit par itération (vérifiable par récurrence)

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_{2n+1} = 0 \qquad a_{2n} = \frac{(-1)^n p!}{2^{2n} n!(n+p)!} a_0$$

que l'on obtient en écrivant

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= -\frac{1}{2n(2n+2p)} a_{2n-2} \\
&= \frac{1}{2n(2n-2)(2n-2-2p)} a_{2n-4} \\
&\vdots \\
&= \frac{(-1)(-1)\cdots}{2n(2n-2)\cdots(2n+2p)(2n-2-2p)\cdots} a_2 \\
&= \frac{(-1)(-1)\cdots(-1)}{2n(2n-2)\cdots 2(2n+2p)(2n-2-2p)\cdots 2+2p} a_0 \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n! 2^n (n+p)(n-1+p)\cdots(1+p)} a_0 \\
&= \frac{(-1)^n p!}{2^{2n} n!(n+p)!} a_0
\end{aligned}$$

Lorsque $a_0 = 0$, la fonction z est nulle de rayon infini.
Lorsque $a_0 \neq 0$,

$$z(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$$

avec pour $x \neq 0$,

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} x^{2(n+1)}}{a_{2n} x^{2n}} \right| = \frac{1}{2^2 (n+1)(n+p+1)} |x|^2 \longrightarrow 0$$

et ainsi la série converge ; le rayon est infini.

3. Ainsi pour toute valeur donnée à $a_0 \in \mathbb{R}$, la série

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n p!}{2^{2n} n!(n+p)!} a_0 x^{2n}$$

de rayon infinie est solution de (E'_p) sur $\mathbb{R}$.

4. On considère la série entière

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n+p} n!(n+p)!} x^{2n+p}$$

(a) Pour tout x réel, on peut définir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n p!}{2^{2n} n!(n+p)!} x^{2n}$$

et donc aussi ($p!$ est une constante)

$$\frac{1}{2^p} x^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+p)!} x^{2n}$$

soit
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+p} n!(n+p)!} x^{2n+p}$$
qui possède donc un rayon infini. On note désormais J_p la somme de cette série vérifiant donc
$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+p)!} x^{2n} = x^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n p!}{2^{2n} n!(n+p)!} \frac{2^p}{p!} x^{2n}$$

(b) Avec $a_0 = \frac{2^p}{p!}$ (on peut aussi invoquer la linéarité) on en déduit des questions 1) et 3) que J_p est une solution de (E_p) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

(c) La fonction J_p est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ puisqu'il s'agit d'une série entière de rayon infini.

(d) On sait pour l'instant que J_p est solution sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et qu'elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Si $p \geqslant 1$, on a $J_p(0) = 0$ et ainsi l'équation $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ est vrai en 0.

Si $p = 0$, l'équation est $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$, vraie aussi pour $x = 0$ (même si ici $J_0(0) = 1$).

Ainsi la fonction J_p est une solution de (E_p) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

5. On a
$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+p} n!(n+p)!} x^{2n+p}$$
et ainsi par dérivation terme à terme
$$J_p'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n+p)}{2^{2n+p} n!(n+p)!} x^{2n+p-1}$$
et ainsi
$$\begin{aligned}
J_p'(x) &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n+p)}{2^{2n+p} n!(n+p)!} x^{2n+p} \\
&= \frac{1}{x} p J_p(x) + \sum_{n=\boxed{1}}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2n}{2^{2n+p} n!(n+p)!} x^{2n+p-1} \\
&= \frac{1}{x} p J_p(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2(n+1)}{2^{2n+2+p} (n+1)!(n+1+p)!} x^{2(n+1)+p-1)} \\
&= \frac{1}{x} p J_p(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+p+1} n!(n+1+p)!} x^{2n+p+1} \\
&= \frac{1}{x} p J_p(x) - J_{p+1}(x)
\end{aligned}$$
Ainsi nous avons la relation :
$$\forall p \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^*\,,\ J_{p+1}(x) = \frac{pJ_p(x)}{x} - J_p'(x).$$