Devoir surveillé n°2
4 heures

Exercice 1 : étude locale d'une fonction

On pose

$$f(x) = \frac{x}{\operatorname{ch} x - 1} - \frac{2}{x}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 que l'on précisera.
3. Que peut-on en déduire ?
4. Réprésenter la courbe représentative de f au voisinage de 0.

Exercice 2 : étude d'une branche infinie

On pose

$$f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$$

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
2. Montrer que la fonction $u \mapsto uf\left(\frac{1}{u}\right)$ admet un développement limité en 0^+ d'ordre 2.
3. En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$ dont on précisera l'équation ainsi que la position locale par rapport à la courbe de f.
4. Montrer de même que la courbe représentative de f admet une asymptote en $-\infty$ dont on précisera l'équation ainsi que la position locale par rapport à la courbe de f.
5. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative. On précisera les positions des asymptotes globalement.
6. Que remarque-t-on ? Prouver le.

Exercice 3

On considère pour tout entier n non nul l'équation

$$f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4 = 0 \qquad (E_n)$$

sur $[0, +\infty[$.

1. (*) Montrer que (E_n) admet une unique solution que l'on note x_n.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ x_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[.$$
3. (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $f_{n+1}(x_n) < 0$ en en déduire les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. (*) Montrer alors que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
5. (**) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{2}{3}$.
6. (**) Montrer que
$$\frac{2}{3} - x_n \sim \frac{1}{12} x_n^n$$
puis que (**** car il y a un piège)
$$\frac{2}{3} - x_n \sim \frac{1}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Exercice 4

On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

1. Jusfifier que f admet des développements limités en 0 à tout ordre. On écrit
$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \mathrm{o}_0(x^n)$$
2. Calculer a_0, a_1, a_2, a_3, a_4.
3. Toto pense utiliser la formule de Taylor pour déterminer a_n pour tout entier n. Qu'en pensez-vous et pourquoi ?
4. Finalement, toto opte pour une composée en posant $u = x + x^2$ et en composant par $\frac{1}{1+u}$ en 0. Qu'en pensez-vous et pourquoi ?
5. Toto est découragé mais Tata a une autre idée, en utilisant le fait que $f(x)(1+x+x^2) = 1$, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} x^i + \sum_{i=2}^{n} a_{i-2} x^i = 1$$
6. Déterminer une relation de récurrence entre les a_i. On trouvera
$$\forall n \geqslant 2\,,\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 0$$
avec $a_0 = 1$, $a_1 = -1$.

   Calculer a_5, a_6, a_7. Que peut-on conjecturer ? Prouvez le.
7. Donner finalement une expression générale de a_n. On exprimera a_n à l'aide de
$$j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \qquad \bar{j} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$
Montrer la conjecture sans utiliser de récurrence (on rappelle que $j^3 = 1$).

Exercice 5 :

(Développement limité de tan, le retour)

1. Justifier qu'il existe une suite (a_n) unique de sorte que la fonction tangente admette un développement limité à tout ordre $2n+2$ avec $n \in \mathbb{N}$ de la forme

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2})$$

2. Rappeler les valeurs de a_0 et a_1.
3. Justifier (attention) que l'on a pour tout entier n,

$$\tan'(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (2k+1) a_k x^{2k} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

4. En utilisant la relation $\tan' = 1 + \tan^2$, en déduire que si $n \geqslant 1$, on a

$$(2n+1)a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k}$$

indication : faire le bilan des termes en x^{2n} en justifiant

5. Retouver a_2 et déterminer a_3. Écrire le développement limité de la fonction tangente à l'ordre 8.

Exercice 6

On considère la fonction w définie sur $[0, +\infty[$ par

$$w(x) = x^2 - 2$$

1. Méthode de la tangente de Héron.
   (a) Soit $\alpha > 0$, donner une équation de la tangente $\mathcal{T}_\alpha$ à $\mathcal{C}_w$ en α.
   (b) Montrer que $\mathcal{T}_\alpha$ coupe l'axe (Ox) en un point d'abscisse

$$\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{2}{\alpha}\right)$$

   (c) Représenter précisément sur un même graphique la courbe $\mathcal{C}_w$, la tangente $\mathcal{T}_\alpha$ avec $\alpha = 2$ par exemple.

2. Approximation de $\sqrt{2}$ par la méthode de Héron [1].

   On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 3/2$ et la relation de récurrence

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{2}{U_n}\right)$$

   et on pose $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$ sur $]0, +\infty[$.

1. Héron d'Alexandrie est un ingénieur, un mécanicien et un mathématicien grec du Ier siècle apr. J.-C.

(a) Montrer que $]0,+\infty[$ est un intervalle stable par f. En déduire que la suite (U_n) est bien définie.

(b) Représenter joliment la suite (U_n) sur un graphique où l'on représente aussi $\mathcal{C}_w$ (et non $\mathcal{C}_f$, attention) en mettant en valeur la méthode de la tangente.
Qu'observe-t-on ? Que peut-on conjecturer ?

(c) Étudier la fonction f sur $]0,+\infty[$. On précisera l'asymptote en $+\infty$ et la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

(d) Montrer que f admet un unique point fixe que l'on note ℓ et que l'on précisera.

(e) Représenter très joliment aussi la suite (U_n) sur un graphique où l'on représente $\mathcal{C}_f$, la première bissectrice, l'asymptote.

(f) Démontrer que si la suite (U_n) converge, alors elle converge vers ℓ (attention, il y a des pièges, vous êtes prévenu !).

(g) Montrer que la suite (U_n) est minorée par ℓ.

(h) Montrer que la suite (U_n) est strictement décroissante.

(i) Montrer que la suite (U_n) converge vers ℓ.

(j) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que
$$U_{n+1} - \ell = \frac{(U_n - \ell)^2}{2U_n}$$

(k) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ 0 < U_{n+1} - \ell \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}(U_n - \ell)^2$$

(l) Montrer que (attention, bien lire deux puissance n)
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ 0 < U_n - \ell \leqslant \frac{1}{2^{\frac{3\times(2^n-1)}{2}}}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^{2^n}$$

(m) Montrer que $0 < \frac{3}{2} - \sqrt{2} < \frac{1}{10}$, et en déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ 0 < U_n - \ell \leqslant \frac{1}{10^{2^n}}$$

(n) Retrouver le fait que la suite (U_n) converge vers ℓ.

(o) Déterminer n_0 de sorte que U_{n_0} soit une valeur approchée à 10^{-10} de ℓ et préciser U_{n_0}. La valeur n_0 trouvée est-elle la valeur optimale ?
Et pour 10^{-100} ? Commentez et expliquez l'intérêt de cette méthode.

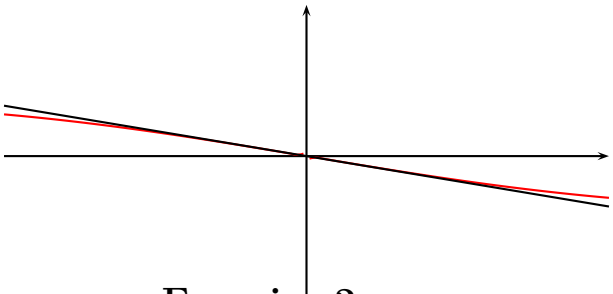
FIN

Exercice 1 : étude locale d'une fonction

On pose

$$f(x) = \frac{x}{\operatorname{ch} x - 1} - \frac{2}{x}$$

1. On sait que $\operatorname{ch} x = 1 \iff x = 0$ et ainsi la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$; elle est de plus impaire.
2. On a
$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \mathrm{o}_0(x^6)$$
et ainsi
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + + \frac{x^6}{720} + \mathrm{o}_0(x^7)} - \frac{2}{x} \\ &= \frac{2}{x + \frac{x^3}{12} + \frac{x^5}{360} + \mathrm{o}_0(x^5)} - \frac{2}{x} \\ &= \frac{2}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{360} + \mathrm{o}_0(x^4)} - \frac{2}{x} \\ &= \frac{2}{x} \times \left(1 - \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{360} + \frac{x^4}{144} + \mathrm{o}_0(x^4)\right) - \frac{2}{x} \\ &= -\frac{x}{6} + \frac{x^3}{100} + \mathrm{o}_0(x^3) \end{aligned}$$
Ainsi la fonction f admet un développement limité en 0 à l'ordre 3.
3. On en déduit que f est prolongeable par continuité en 0, avec $f(0) = 0$, que ce prolongement est dérivable en 0 avec $f'(0) = -\frac{1}{6}$ et que la courbe traverse la tangente au voisinage de 0, en dessous à gauche de 0, et au dessus à droite.
4. On représente la courbe de f au voisinage de 0 :



Exercice 2

1. La fonction polynôme du second degré $P(x) = x^2+x+1$ est de discriminant $\Delta = -3 < 0$. Ainsi $P > 0$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ par composée avec la fonction racine qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

2. Pour $u \neq 0$, nous avons si $u > 0$,

$$\begin{aligned} uf\left(\frac{1}{u}\right) &= u\sqrt{1+\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}} \\ &= \sqrt{1+u+u^2} \\ &= 1+\frac{1}{2}(u+u^2)-\frac{1}{8}(u+u^2)^2+\mathrm{o}_0(u^2) \\ &= 1+\frac{u}{2}+\frac{u^2}{2}-\frac{1}{8}u^2+\mathrm{o}_(\,u^2) \\ &= 1+\frac{u}{2}+\frac{3}{8}u^2+\mathrm{o}_0(u^2) \end{aligned}$$

Ainsi la fonction $u \mapsto uf\left(\frac{1}{u}\right)$ admet un développement limité en 0^+ d'ordre 2.

3. On a alors

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}u+\mathrm{o}_0(u)$$

et ainsi

$$f(x) = x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+\mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit alors que la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = x+\frac{1}{2}$, et sachant que

$$f(x)-x-\frac{1}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{8x}$$

la courbe est située au dessus des son asymptote, au voisinage de $+\infty$.

4. De la même façon, mais attention à la gestion du signe, Pour $u \neq 0$, nous avons si $u < 0$,

$$\begin{aligned} uf\left(\frac{1}{u}\right) &= u-\sqrt{1+\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}} \\ &= -\sqrt{1+u+u^2} \\ &= -1-\frac{u}{2}-\frac{3}{8}u^2+\mathrm{o}_0(u^2) \end{aligned}$$

5. On a alors de même

$$f(x) = -x-\frac{1}{2}-\frac{3}{8x}+\mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit alors que la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = -x-\frac{1}{2}$, et sachant que

$$f(x)-x-\frac{1}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{8x}$$

la courbe est située au dessus de son asymptote, au voisinage de $-\infty$.

6. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$f'(x) = \frac{1+2x}{2\sqrt{1+x+x^2}}$$

On en déduit alors les variations de f :

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}/2$	$\nearrow$	$+\infty$

7. Il semblerait que la courbe représentative de f présente une symétrie d'axe $x = -1/2$. En effet, on a

$$f(-1-u) = \sqrt{1+(-1-u)+(-1-u)^2} = \sqrt{1+u+u^2} = f(u) = f\left(2\times\frac{-1}{2}-u\right)$$

pour tout u réel, et ainsi la courbe de f est bien symétrique par rapport à la droite d'équation $y = \frac{-1}{2}$.

Pour $x \geqslant -\frac{1}{2}$, on a

$$f(x) - \left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1+x+x^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}$$

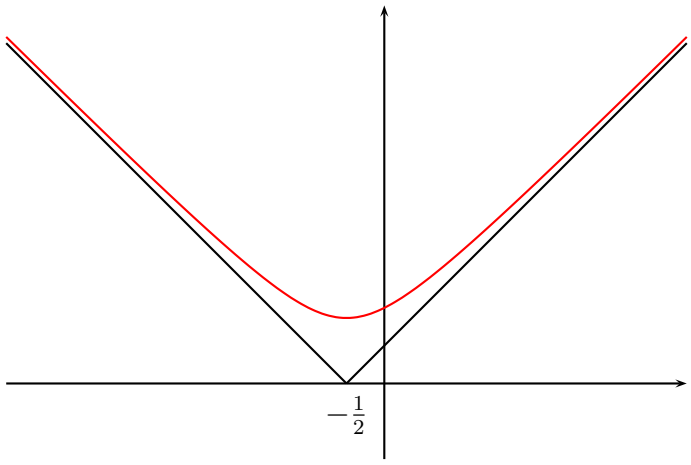
du signe du numérateur

$$1+x+x^2-x^2-x-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$$

Pour $x \leqslant -\frac{1}{2}$,

$$f(x) - \left(x+\frac{1}{2}\right) \geqslant 0$$

sans indétermination. Ainsi la courbe est située au dessus de ses asymptotes, et cela, par symétrie, de manière globale.

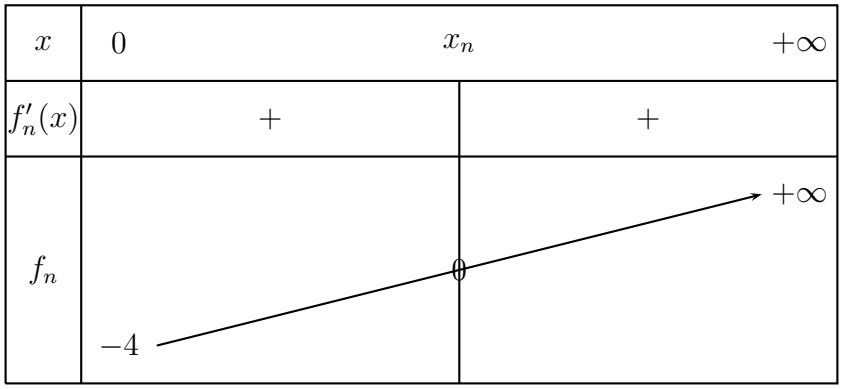


Exercice 3

1. On pose $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4 = 0$ sur $[0, +\infty[$. La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme fonction polynomiale, et on a f_n strictement croissante sur $[0, +\infty[$ par opérations, ou par sa dérivée

$$f_n'(x) = nx^{n-1} + 18x$$

strictement positive, sauf en 0. On en déduit les variations de la fonction f_n sur $[0, +\infty[$:



Ainsi f continue, établit une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[-4, +\infty[$ et donc admet un unique zéro que l'on note x_n avec $x \in]0, +\infty[$.

On remarquera que si $n = 1$, $f_1(x) = x + 9x^2 - 4 = 9x^2 + x - 4$, de discriminant $\Delta = 1 + 36 = 37$, et ainsi $x_1 = \frac{\sqrt{37}-1}{2}$. Pour $n = 2$, $f_2(x) = 10x^2 - 4$ et $x_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

2. On a

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 4 - 4 = \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$$

et ainsi par les variations de f_n, on a forcément $x_n < \frac{1}{2}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ x_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[.$$

3. On a si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + 9x_n^2 - 4x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1) < 0$$

D'après les variations de la fonction f_{n+1}, on a donc forcément $x_n < x_{n+1}$. Ainsi la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante.

4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, majorée par $\frac{2}{3}$ et donc elle converge vers une limite L avec $L \in]0, 2/3]$.

5. On sait que pour tout entier n non nul,

$$x_n^n + 9x_n^2 - 4 = 0 \qquad (E_n')$$

Or $|x_n^n| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et ainsi (x_n^n) converge vers 0 et donc en passant à la limite dans (E_n'),

$$9L^2 - 4 = 0$$

et ainsi puisque $L > 0$, on a $L = \frac{2}{3}$. Ainsi la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{2}{3}$.

6. On écrit (E'_n) sous la forme

$$4 - 9x_n^2 = (2 - 3x_n)(2 + 3x_n) = x_n^n$$

et ainsi

$$2 - 3x_n = \frac{1}{2 + 3x_n} x_n^n$$

soit encore

$$\frac{2}{3} - x_n = \frac{1}{3(2 + 3x_n)} x_n^n$$

Or $(2 + 3x_n)$ converge vers 4 et donc

$$\boxed{\frac{2}{3} - x_n \sim \frac{1}{12} x_n^n}$$

Ensuite [2] on écrit que

$$x_n^n = \mathrm{e}^{n \ln(x_n)}$$

et sachant que

$$x_n = \frac{2}{3} + x_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - x_n\right)\right)$$

et ainsi

$$\ln(x_n) = \ln\frac{2}{3} + \ln\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - x_n\right)\right)$$

d'où

$$n\ln(x_n) = n\ln\frac{2}{3} + n\ln\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - x_n\right)\right)$$

Or on a

$$\ln\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - x_n\right)\right) \sim -\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - x_n\right) \sim -\frac{1}{8} x_n^n$$

et donc

$$n\ln\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - x_n\right)\right) \sim -\frac{n}{8} x_n^n$$

Or

$$0 \leqslant n x_n^n \leqslant n\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

et par comparaison puissance-exponentielle

$$n^1\left(\frac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 0$$

et ainsi $nx_n^n \longrightarrow 0$. Finalement on a obtenu rigoureusement

$$\boxed{\frac{2}{3} - x_n \sim \frac{1}{12} x_n^n \sim \frac{1}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

Exercice 4

2. il serait faux de simplement passer à la puissance n (qui n'est pas une constante) en disant que

$$x_n \sim \frac{2}{3} \Longrightarrow x_n^n \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, sachant que $1+x+x^2>0$ pour tout x réel (fonction polynôme du second degré de disciminant $-3<0$) et comme $x\mapsto 1+x+x^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, f aussi. Ainsi d'après la formule de Taylor-Young, la fonction f admet des développements limités en 0 à tout ordre. On écrit
$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \mathrm{o}_0(x^n)$$

2. On a, par composée, sachant que $\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+u^4+\mathrm{o}_0(u^4)$,
$$f(x)=1-(x+x^2)+(x+x^2)^2-(x+x^2)^3+(x+x^2)^4+\mathrm{o}_0(x^4)$$
soit en tronquant
$$f(x)=1-x-x^2+x^2+2x^3+x^4-x^3-3x^4+x^4+\mathrm{o}_0(x^4)=1-x+x^3-x^4+\mathrm{o}_0(x^4)$$
et ainsi
$$a_0=1 \qquad a_1=-1 \qquad a_2=0 \qquad a_3=1 \qquad a_4=-1$$

3. Comme que $f(x)(1+x+x^2)=1$, par dévéloppements limités à l'ordre n,
$$(1+x+x^2)\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 1+\mathrm{o}_0(x^n)$$
que l'on développe en tronquant à l'ordre n et en identifiant par unicité
$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{i+1} + \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-2} x^{i+2} = 1$$
soit encore
$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} x^i + \sum_{i=2}^{n} a_{i-2} x^i = 1$$

4. On identifie alors le coefficient de degré n :
$$\forall n \geqslant 2\,,\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 0$$
et pour $n=0$, $n=1$:
$$a_0=1 \qquad a_1+a_0=0$$
soit encore $a_0=1$ et$a_1=-1$. Puis
$$a_5=-a_3-a_4=0 \qquad a_6=-a_4-a_5=-1 \qquad a_7=-a_5-a_6=1$$
On peut conjecturer que la suite (a_n) est périodique de période 3 avec
$$(a_n)=(\overline{1,-1,0},\ldots)$$
Pour le prouver, on peut procéder par récurrence : on a $(a_0,a_1,a_2)=(1,-1,0)$. On suppose que
$$(a_{3n},a_{3n+1},a_{3n+2})=(1,-1,0)$$
alors
$$a_{3(n+1)}=a_{3n+3}=-a_{3n+2}-a_{3n+1}=1$$
puis
$$a_{3(n+1)+1}=a_{3n+4}=-a_{3n+3}-a_{3n+2}=-1$$
et finalement
$$a_{3(n+1)+2}=a_{3n+5}=-a_{3n+4}-a_{3n+3}=0$$
ce qui achève la récurrence.

5. La suite (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est $P = X^2 + X + 1$, de discriminant $\Delta = -3$, de racines

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = j, \bar{j}$$

Ainsi il existe des constantes a et b complexes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_n = aj^n + b\bar{j}^n$$

Les conditions initiales $a_0 = a + b = 1$ et $a_1 = -1 = aj + b\bar{j}$ conduisent à

$$a + b = 1 \qquad -\frac{a+b}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b) = -1$$

d'où

$$a - b = -\frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{i}{\sqrt{3}}$$

et ainsi

$$a = \frac{1 + \frac{i}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}}$$

et

$$b = \frac{1 - \frac{i}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{3}}$$

Finalement, par exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(\sqrt{3}+i)j^n + (\sqrt{3}-i)\bar{j}^n\right]$$

que l'on peut aussi écrire

$$a_n = \frac{i}{\sqrt{3}}(\bar{j}^n - j^n)$$

Ainsi sachant que $j^{3n} = (j^3)^n = 1$,

$$a_{3n} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i) = 1$$

et

$$a_{3n+1} = \frac{i}{\sqrt{3}}(\bar{j}^2 - j^2) = \frac{i}{3}(\bar{j} - j)(\bar{j} + j) = \frac{i}{3}(-\sqrt{3}i)(-1) = -1 = -1$$

et

$$a_{3n+2} = \frac{i}{\sqrt{3}}(\bar{j}^3 - j^3) = 0$$

Exercice 5

1. La fonction tangente étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\frac{]-\pi/2,\pi}{2[}$ voisinage de 0, et impaire, d'après la formule de Taylor, elle admet des développements limités à tout ordre, impairs, d'où le résultat.
2. On rapelle que $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ et ainsi $a_0 = 1$ et $a_1 = \frac{1}{3}$. On se rapelle aussi que $a_2 = \frac{2}{15}$.

3. La fonction $\tan'$ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc elle admet un développement limité à l'odre $2n+1$, et comme elle est paire, ce développment limité es pair, et on écrit

$$\tan'(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{2k} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

que l'on intègre en

$$\tan(x) = 0 + \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{2k+1} x^{2k+1} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

et ainsi par unicité des développements limités, nous avons, pour tout k entre 0 et n

$$\frac{b_k}{2k+1} = a_k$$

soit encore $b_k = (2k+1)a_k$, ce qui permet de conclure.

4. On a alors, à l'ordre $2n+1$, sachant que $\tan' = 1 + \tan^2$

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)a_k x^{2k} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} 1 + \left[\sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k+1} + \mathrm{o}(x^{2n+1})\right]^2$$

que l'on écrit pour la suite

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)a_k x^{2k} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} 1 + \left[\sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k+1} + \mathrm{o}(x^{2n+1})\right]\left[\sum_{k'=0}^{n} a_{k'} x^{2k'+1} + \mathrm{o}(x^{2n+1})\right]$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, en regardant celui de degré $2n$, on a

$$(2n+1)a_n = \sum_{2k+1+2k'+1=2n} a_k a_{k'} = \sum_{k+k'=n-1} a_k a_{k'} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k}$$

5. On a alors en apliquant la formule précédente pour $n=2$,

$$5a_2 = a_0a_1 + a_1a_0 = \frac{2}{3} \qquad a_2 = \frac{2}{15}$$

puis

$$7a_3 = a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0 = 2a_0a_2 + a_1^2 = \frac{4}{15} + \frac{1}{9} = \frac{12+5}{45} \qquad a_3 = \frac{17}{315}$$

On a donc

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \mathrm{o}(x^8)$$

Exercice 6

1. (a) Soit $\alpha > 0$. Comme w est dérivable, la tangente $\mathcal{T}_\alpha$ à $\mathcal{C}_w$ en α a pour équation normalisée

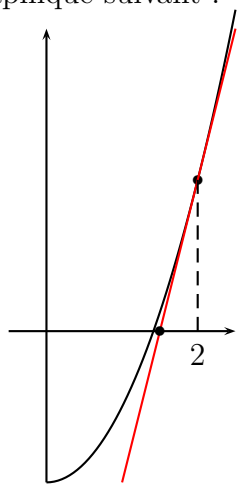
$$y = w'(\alpha)(x-\alpha) + w(\alpha) = 2\alpha(x-\alpha) + \alpha^2 - 2 = 2\alpha x - 2 - \alpha^2$$

(b) On a

$$y(x) = 0 \iff 2\alpha x = 2 + \alpha^2 \iff x = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{2}{\alpha}\right)$$

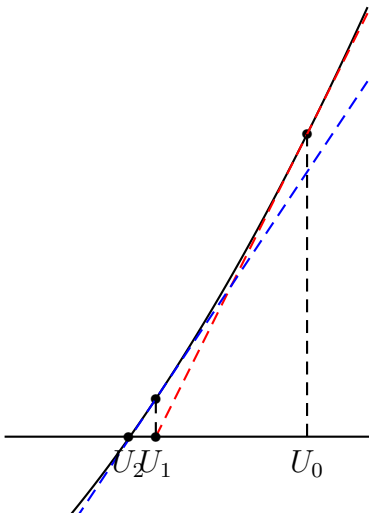
et ainsi $\mathcal{T}_\alpha$ coupe l'axe (Ox) en un point d'abscisse $\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{2}{\alpha}\right)$.

(c) Avec $\alpha = 2$, nous obtenons le graphique suivant :



2. (a) Soit $x \in]0, +\infty[$, on a $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) > 0$ et ainsi $f(x) \in]0, +\infty[$. Donc l'intervalle $]0, +_i nfty[$ est stable par la fonction f. Comme $U_0 = \frac{3}{2} \in I$, et la suite (U_n) étant définie par la relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$, on en déduit que la suite (U_n) est bien définie.

(b) On représente la méthode de la tangente, avec deux itérations seulement, la convergence étant tellement rapide :



On observe que la suite (U_n) est décroissante, converge vers l'abscisse de l'intersection de $\mathcal{C}_w$ avec l'axe (Ox), soit $\sqrt{2}$, et que cette convergence est très rapide.

(c) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et on a $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-2}{2x}$. On en déduit les variations :

En $+\infty$, on remarque que

$$f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

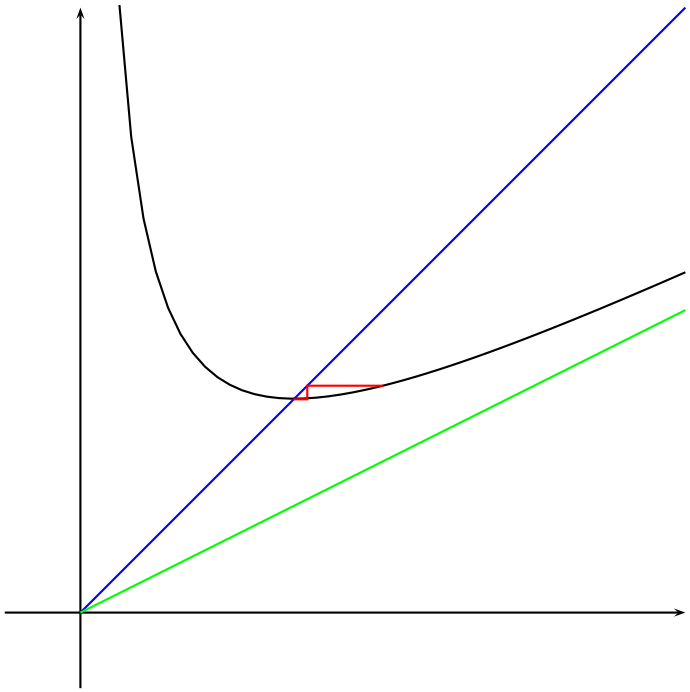
et ainsi $y = \frac{x}{2}$ est asymptote en $+\infty$, et la courbe est située au dessus de cette asymptote.

(d) Soit $x > 0$, on a

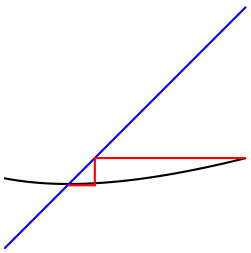
$$f(x) = x \iff 2x = x + \frac{2}{x} \iff x = \frac{2}{x} \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$$

et ainsi f admet un unique point fixe ℓ avec $\ell = \sqrt{2}$.

(e) On représente alors la suite récurrente (U_n) :



et en zoomant (la convergence est vraiment trop rapide !)



(f) Si la suite (U_n) converge, vers une limite L, alors comme (U_n) est une suite de $]0, +\infty[$, on peut affirmer que $L \geqslant 0$. De plus nus avons par la relation de récurrence

$$2U_{n+1}U_n = U_n^2 + 2$$

Comme (U_{n+1}) converge aussi vers L par extraction, nous avons par passage à la limite

$$2L^2 = L^2 + 2$$

soit $L^2 = 2$ et donc $L = +\sqrt{2} = \ell$.

(g) Plusieurs méthodes possible : par récurrence par exemple. Ou : comme $U_{n+1} = f(U_n) \geqslant \ell$ nous avons si $n \geqslant 1$, $U_n \geqslant \ell$.
De plus $U_0 = 3/2 \geqslant \ell$.
On peut aussi dire que $[\ell, +\infty[$ est stable par f et que $U_0 \in [\ell, +\infty[$.
Ainsi la suite (U_n) est minorée par ℓ.

(h) Soit $n \in \mathbb{N}$. ON a

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{2}{U_n}\right) - U_n = \frac{1}{U_n} - \frac{U_n}{2} = \frac{2 - U_n^2}{2U_n} < 0$$

puisque dans la question précédente, la minorée peut-être prouvée stricte. Donc la suite (U_n) est strictement décroissante.

(i) La suite (U_n) est strictement décroissante et minorée, donc elle converge et on a vu que alors elle doit converger vers ℓ. Ainsi la suite (U_n) converge vers ℓ.

(j) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} U_{n+1} - \ell &= \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{2}{U_n}\right) - \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{2}{U_n} - 2\ell\right) \qquad = \frac{1}{2U_n}\left(U_n^2 + \ell^2 - 2\ell U_n\right) = \frac{(U_n - \ell)^2}{2U_n} \end{aligned}$$

(k) Comme $U_n > \sqrt{2}$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ 0 < U_{n+1} - \ell \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}(U_n - \ell)^2$$

(l) On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété

$$0 < U_n - \ell \leqslant \frac{1}{2^{\frac{3\times(2^n-1)}{2}}}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^{2^n}$$

Pour $n = 0$, $U_0 - \ell = 3/2 - \sqrt{2}$ et le terme de droite vaut 1 et

$$3/2 - \sqrt{2} > 0 \iff 3 > 2\sqrt{2} \iff 9 > 8$$

ainsi que

$$3/2 - \sqrt{2} < 1 \iff 3 - 2\sqrt{2} < 2 \iff 1 < 2\sqrt{2} \iff 1 < 8$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et alors

$$\begin{aligned} 0 < U_{n+1} - \ell &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}(U_n - \ell)^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2^{3/2}}\left[\frac{1}{2^{\frac{3\times(2^n-1)}{2}}}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^{2^n}\right]^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2^{3/2}}\frac{1}{2^{3\times(2^n-1)}}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^{2^{n+1}} \\ &\leqslant \frac{1}{2^{3\times(2^n-1)+3/2}}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^{2^{n+1}} \\ &\leqslant \frac{1}{2^{\frac{3.2.2^n-3}{2}}}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^{2^{n+1}} \\ &\leqslant \frac{1}{2^{\frac{3(2^{n+1}-1)}{2}}}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

(m) on a

$$\begin{aligned} 0 < \frac{3}{2} - \sqrt{2} < \frac{1}{10} &\iff \frac{3}{2} - \frac{1}{10} < \sqrt{2} < \frac{3}{2} \\ &\iff \frac{14}{10} < \sqrt{2} < \frac{3}{2} \\ &\iff 14 < 10\sqrt{2} < 15 \\ &\iff 196 < 200 < 225 \end{aligned}$$

ce qui est vrai d'où le résultat. En ajoutant le fait que si $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{3 \times (2^n - 1)}{2} \geqslant 0$$

on a donc la majoration simplifiée (non optimisée) mais plus pratique à utiliser

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ 0 < U_n - \ell \leqslant \frac{1}{10^{2^n}}$$

(n) Comme 2^n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{10^{2^n}}$ tend vers 0 et on retrouve donc le fait que la suite (U_n) converge vers ℓ.

(o) On a [3]

$$\frac{1}{10^{2^n}} \leqslant \frac{1}{10^{10}} \iff 2^n \geqslant 10 \iff n \geqslant 4$$

et ainsi U_4 est une valeur approchée à 10^{-10} de ℓ et on a $U_4 =$.

La valeur n_0 trouvée n'est pas la valeur optimale, vu que l'on a effectuée un certain nombre de simplifications dans les majorations (et de toute façon, on a une majoration de l'écart).

Pour 10^{-100},

$$\frac{1}{10^{2^n}} \leqslant \frac{1}{10^{100}} \iff 2^n \geqslant 100 \iff n \geqslant 7$$

En 7 itérations, nous avons 100 décimales. La convergence selon la méthode de la tangente est très rapide.

3. sans machine, les puissances de 2 sont 1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024,2048,…