Devoir surveillé n°3
4 heures

Exercice I

On considère la série numérique $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n^2}$.

1. On pose $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$. Étudier les variations de la fonction f (*joli tableau de variation obligatoire*).
   En déduire que f est strictement décroissante sur $[2, +\infty[$.
2. Montrer que
   $$\frac{\ln(n)}{n^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$
   et en déduire la convergence de la série numérique $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n^2}$. On note L sa somme.

   On note alors S_n la somme partielle et R_n le reste d'ordre n, c'est à dire
   $$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k^2} \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^2}$$
3. Soit $k \geqslant 3$, montrer que
   $$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln(k)}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x.$$
4. En déduire que si $N \geqslant n+1 \geqslant 3$,
   $$\int_{n+1}^{N} f(x)\mathrm{d}x + \frac{\ln(N)}{N^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\ln(k)}{k^2} \leqslant \int_n^N f(x)\mathrm{d}x$$
   puis que
   $$\int_{n}^{N} f(x)\mathrm{d}x - \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{\ln(N)}{N^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\ln(k)}{k^2} \leqslant \int_n^N f(x)\mathrm{d}x$$
5. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$. On procédera par intégration par parties.
6. Montrer alors que
   $$\frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} \leqslant R_n \leqslant \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n}$$
7. En déduire que $R_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$.
8. Étude de la même série alternée.

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n\ln(n)}{n^2}$ est convergente. On note ℓ sa somme, $\widetilde{S}_n$ sa somme partielle d'ordre n.

Nous allons déterminer une relation entre ℓ et L.

(b) Soit $n\geqslant 1$, montrer en séparant les termes d'indices pairs de ceux d'indices impairs que

$$\widetilde{S}_{2n+1}=\sum_{k=2}^{2n+1}\frac{(-1)^k\ln(k)}{k^2}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{(2k)^2}-\sum_{k=2}^{2n+1}\frac{\ln(k)}{k^2}$$

(c) En déduire que

$$\widetilde{S}_{2n+1}=\frac{1}{2}S_n-S_{2n+1}+\frac{\ln(2)}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}$$

(d) En déduire, sachant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$, une relation entre ℓ et L.

Exercice II : séries alternées très spéciales

A – Généralités

1. (a) Énoncer le critère spécial des séries alternées (critère de Leibniz) en précisant aussi la majoration du reste ainsi que son signe. (*La suite du problème dépend de ces conditions précises*).

   (b) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ est-elle convergente ? absolument convergente ?

2. On considère une série alternée $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$, vérifiant les conditions du critère spécial des séries alternées, (a_n) étant strictement positive, vérifiant en plus :

   (i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$

   (ii) $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+2}-a_{n+1}\geqslant a_{n+1}-a_n$.

   On note [1]

   $$r_n=\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k a_k$$

   (a) Soit $n\in\mathbb{N}$, justifier que le signe de r_n est celui de $(-1)^n$.

   (b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|r_n|+|r_{n+1}|=a_n$.

   (c) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|r_n|-|r_{n+1}|=\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p(a_{n+p}-a_{n+1+p})$.

   (d) Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé, on pose (v_p) la suite définie par : $\forall p\in\mathbb{N}$, $v_p=a_{n+p}-a_{n+p+1}$. Montrer que (v_p) est décroissante de limite nulle.
   En déduire que la suite $(|r_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

1. attention, le reste d'ordre n de la série est $r_{n+1}=R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k a_k$.

(e) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$\frac{a_n}{2} \leqslant |r_n| \leqslant \frac{a_{n-1}}{2}$$

(f) En déduire que

$$r_n \underset{+\infty}{\sim} (-1)^n \frac{a_n}{2}$$

(g) Application : déterminer un équivalent en $+\infty$ de

$$\rho_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$$

B – Calcul de somme non triviale

On rapelle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

Pour $n \geqslant 1$, on pose

$$v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

1. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ est positive strictement décroissante vers 0 et qu'elle vérifie (i) et (ii). En déduire un équivalent de v_n en $+\infty$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est convergente.
3. On pose pour tout N de $\mathbb{N}^*$,

   $$T_N = \sum_{n=1}^{N} v_n$$

   Montrer que

   $$T_N = N v_{N+1} + \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=n}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2} \right)$$

4. Montrer que

   $$\sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=n}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2} \right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}$$

   (on effectuera une permutation soignée des sommes).
5. En déduire la valeur de

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

Exercice III

On note F la fonction zeta alternée de Riemann définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

Dans cet exercice, le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ est la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n$ où

$$c_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$$

c'est à dire que l'on oublie définitivement le fait que $a_0 = b_0 = 0$ et que par conséquant $c_0 = a_0 a_1 = 0$ et $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$ que l'on oublie également.
On veut déterminer la nature selon la valeur de x, de la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ avec elle-même.

Cette étude va illustrer le fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.
On suppose que n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

1. Montrer que si $x > 0$, $F(x)$ est bien définie.
2. *Étude de la convergence.*
   (a) Indiquer sans aucun calcul, en justifiant, la nature et la somme en fonction de F de la série produit de Cauchy $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$, lorsque $x > 1$.
   (b) Soit $x > 0$, montrer que
   $$c_n(x) = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^x}$$
   Que peut-on dire de $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$?
   (c) Démontrer que pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geqslant \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$ (on pourra étudier la fonction $u \mapsto u(n-u)$ sur $[0, n]$).
   En déduire pour $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$, la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$.
3. *Cas où $x = 1$.* On suppose dans cette question que $x = 1$.
   (a) Déterminer deux réels a et b de sorte que $\frac{1}{x(n-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{n-x}$.
   En déduire une expression de $c_n(x)$ en fonction de $\frac{H_{n-1}}{n}$ où $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ (somme partielle de la série harmonique).
   (b) Déterminer la monotonie de la suite $\frac{H_{n-1}}{n}$.
   (c) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$. On pourra utiliser un équivalent classique de H_n.

FIN

Exercice I

On considère la série numérique $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{\ln n}{n^2}$.

1. On pose $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ sur $]0,+\infty[$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, et on a

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{x(1-2\ln(x))}{x^4}$$

On en déduit les variations de f sur $]0,+\infty[$:

x	0		$\mathrm{e}^{1/2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$1/2\mathrm{e}$	↘	0

Comme $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}} < 2$, on en déduit que f est strictement décroissante sur $[2,+\infty[$.

2. Nous avons

$$\frac{\frac{\ln(n)}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow 0$$

et ainsi on a bien

$$\frac{\ln(n)}{n^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

et donc on en déduit convergence absolue et donc la convergence de la série numérique $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n^2}$.

3. Soit $k \geqslant 2$, si $k \leqslant x \leqslant k+1$, comme f décroisante sur $[k,k+1]$, on a

$$\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln(k)}{k^2}$$

et en intégrant sur $[k,k+1]$,

$$\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln(k)}{k^2}$$

et ainsi si $k \geqslant 3$ (pour $k-1$), on obtient

$$\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln(k)}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\mathrm{d}x.$$

4. En sommant à droite pout k allant de $n+1$ à N, et à gauche pour k allant de $n+1$ à $N-1$, on obtient

$$\int_{n+1}^{N} f(x)\mathrm{d}x + \frac{\ln(N)}{N^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\ln(k)}{k^2} \leqslant \int_{n}^{N} f(x)\mathrm{d}x$$

et comme on cherche à obtenir la même intégrale de chaque côté, on ajoute à gauche le terme négatif

$$\int_{n}^{n+1} f(x)\mathrm{d}x - f(n)$$

et ainsi

$$\int_{n}^{N} f(x)\mathrm{d}x - \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{\ln(N)}{N^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\ln(k)}{k^2} \leqslant \int_{n}^{N} f(x)\mathrm{d}x$$

5. On cherche alors une primitive de $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ qui est continue. On a par intégration par parties

$$\begin{aligned}\int^{x} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t &= \int^{x} \left[-\frac{1}{t}\right]' \ln(t)\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{t}\ln(t)\right]^{x} - \int^{x} -\frac{1}{t}\times\frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} + \left[-\frac{1}{t}\right]^{x} = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\end{aligned}$$

6. On en déduit que

$$\int_{n}^{N} f(x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right]_{n}^{N} = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\ln(N)}{N} - \frac{1}{N}$$

et ainsi en faisant tendre N vers $+\infty$, nous obtenons

$$\frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^2} \leqslant \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n}$$

soit encore

$$\frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} \leqslant R_n \leqslant \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n}$$

et comme $\frac{1}{n}$ et $\frac{\ln(n)}{n^2}$ sont négligeables devant $\frac{\ln(n)}{n}$, on déduit que $R_n \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$: plus précisément, en divisant par $\frac{\ln(n)}{n}$,

$$1 + \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{n} \leqslant \frac{R_n}{\frac{\ln(n)}{n}} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

et donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{R_n}{\frac{\ln(n)}{n}} = 1$.

7. (a) On sépare les termes d'indices pairs des termes d'indices impairs

$$\widetilde{S}_{2n+1} = \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{(2k)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k+1)}{(2k+1)^2}$$

et on complète la seconde somme en ajoutant (et on les enlèves aussi) ceux d'indices pairs (d'où le facteur sur la première somme)

$$\widetilde{S}_{2n+1} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{(2k)^2} - \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{\ln(k)}{k^2}$$

et si on ne comprend pas formellement, on peut bien le voir facilement au brouillon sur les termes écrits avec des pointillés …et même avec une valeur spécifique de n pour encore être plus pragmatique

(b) Ainsi, en poursuivant le calcul ($\ln(1) = 0$)

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_{2n+1} &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2) + \ln(k)}{4k^2} - \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{\ln(k)}{k^2} \\ &= \frac{\ln(2)}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2}S_n - S_{2n+1}\end{aligned}$$

(c) En passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient directement

$$\ell = \frac{\ln(2)}{2}\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}L$$

Exercice II

A – Généralités

1. (a) Soit $\sum(-1)^n a_n$ une série numérique avec (a_n) positive, décroissante vers 0. Alors la série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente. De plus, si on note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

le reste d'ordre n, on a R_n du signe de $(-1)^{n+1}a_{n+1}$ et

$$|R_n| \leqslant a_{n+1}$$

(b) On pose $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$. L'étude des variations de f montre que f est décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$. Ainsi la suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n\geqslant 3}$ est décroissante, positive. De plus elle converge vers 0. Ainsi d'après le critère de Leibniz, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ est convergente ; on peut alors en déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ est aussi convergente.

Par contre, elle ne converge pas absolument, puisque si $n \geqslant 3$,

$$\left|(-1)^n\frac{\ln n}{n}\right| \geqslant \frac{1}{n}$$

2. (a) On applique la règle de Leibniz : le signe de

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k a_k$$

est celui du premier terme, c'est à dire $(-1)^n a_n$, c'est à dire le signe de $(-1)^n$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} |r_n| + |r_{n+1}| &= \left| (-1)^n \underbrace{\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-n} a_k}_{\geqslant 0} \right| + \left| (-1)^{n+1} \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-n-1} a_k}_{\geqslant 0} \right| \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-n} a_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-n-1} a_k \\ &= a_n \end{aligned}$$

par télescopage.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |r_n| - |r_{n+1}| &= \left| (-1)^n \underbrace{\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-n} a_k}_{\geqslant 0} \right| - \left| (-1)^{n+1} \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-n-1} a_k}_{\geqslant 0} \right| \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-n} a_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-n-1} a_k \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p a_{n+p} - \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p a_{n+1+p} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (a_{n+p} - a_{n+1+p}) \end{aligned}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$, les suites $(a_{n+p})_p$ et $(a_{n+p+1})_p$ sont extraites de la suite (a_n) et donc elles convergent toutes deux vers 0. Ainsi la suite (v_p) converge aussi vers 0. De plus, si $p \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{p+1} - v_p = a_{n+p+1} - a_{n+p+2} - (a_{n+p} - a_{n+p+1}) \leqslant 0$$

d'après (ii) appliquée au rang $n+p$. Ainsi la suite (v_p) est une suite décroissante vers 0.

On peut alors appliquer le critère de Leibniz à la série $\sum (-1)^p v_p$: elle est convergente (on le savait déjà) et on a sa somme

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (a_{n+p} - a_{n+p+1})$$

qui est du signe du premier terme, c'est à dire $a_n - a_{n+1}$, positif. On en déduit que $|r_n| - |r_{n+1}| \geqslant 0$. Ainsi la suite $(|r_n|$ est décroissante. On sait aussi qu'elle converge vers 0 puisque (r_n) converge vers 0 (suite des restes décalés d'une série convergente).

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $(|r_n|)$ est décroissante, on a

$$a_n = |r_n| + |r_{n+1}| \leqslant |r_n| + |r_n| = 2|r_n|$$

et ainsi on a déjà

$$\frac{a_n}{2} \leqslant |r_n|$$

D'autre part,

$$a_{n-1} = |r_{n-1}| + |r_n| \geqslant |r_n| + |r_n| = 2|r_n|$$

et ainsi

$$|r_n| \leqslant \frac{a_{n-1}}{2}$$

d'où l'encadrement

$$\frac{a_n}{2} \leqslant |r_n| \leqslant \frac{a_{n-1}}{2}$$

(f) On divise alors par $\frac{a_n}{2} > 0$

$$1 \leqslant \frac{|r_n|}{\frac{a_n}{2}} \leqslant \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

or $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, c'est à dire $a_n \sim a_{n+1}$, c'est à dire aussi que $a_n \sim a_{n-1}$. Donc

$$\lim \frac{|r_n|}{\frac{a_n}{2}} = 1$$

On en déduit que $|r_n| \sim \frac{a_n}{2}$, puis sachant que le signe de r_n est $(-1)^n$,

$$r_n \underset{+\infty}{\sim} (-1)^n \frac{a_n}{2}$$

(g) En application à ceci, déterminons un équivalent en $+\infty$ de

$$\rho_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$$

Si les conditions s'appliquent, on pourra conclure que

$$\rho_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k} \sim (-1)^n \frac{\ln n}{2n}$$

La suite $(a_n) = \left(\frac{\ln n}{n}\right)$ vérifie les conditions, à partir du rang 3, de décroissance et de positivité stricte, ce qui ne gêne en rien l'étude de du reste (r_n) en $+\infty$. Elle converge bien vers 0. On a aussi $a_{n+1} \sim a_n$ sachant que $\ln(n+1) \sim \ln n$ (classique, mais attention, non général). Il reste la condition (ii) à vérifier, c'est à dire pour $n \geqslant 3$,

$$f(n+2) - f(n+1) \geqslant f(n+1) - f(n)$$

avec f la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, soit aussi

$$f(n+1) \leqslant \frac{f(n+2) + f(n)}{2}$$

qui est une inégalité de convexité. On a f deux fois dérivable, avec

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \qquad f''(x) = \frac{-x - (1 - \ln(x))2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

et $f''(x) > 0$ si $x \geqslant 5$, ce qui permet de conclure par convexité, à partir du rang 5, ce qui n'est pas restrictif pour la conclusion d'un équivalent en $+\infty$ de ρ_n.

B – Calcul de somme non triviale

1. La suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ est positive strictement décroissante vers 0. Montrons qu'elle vérifie (i) et (ii). Le point (i) est évident et on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{2}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2} &= \frac{n^2(n+1)^2-2n^2(n+2)^2+(n+1)^2(n+2)^2}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}\\ &= \frac{n^4+2n^3+n^2-2n^4-4n^3-4n^2+n^4+6n^3+6n^2+2}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}\\ &= \frac{4n^3+3n^2+2}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}>0\end{aligned}$$

   On utilisera plutôt la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{x^2}$, deux fois dérivable, dont la dérivée seconde est $f''(x)=\frac{6}{x^4}>0$, ce qui assure la convexité de f d'où le résultat.
   On en déduit alors un équivalent de de v_n en $+\infty$, conformément à la partie précédente :

$$v_n=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\sim\frac{(-1)^n}{2n^2}$$

2. Attention, on n'utilise pas l'équivalent ! On sait d'après la partie précédente (à partir du rang 1) que v_n est du signe de $(-1)^n$, et aussi que $|v_n|$ décroit vers 0. Ainsi $\sum v_n$ est une série alternée vérifiant le critère spécial. On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est convergente.

3. On pose pour tout N de $\mathbb{N}^*$,

$$T_N=\sum_{n=1}^{N}v_n$$

   On a

$$\begin{aligned}T_N &= \sum_{n=1}^{N}v_n=\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\\ &= \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2}+v_{N+1}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2}+Nv_{N+1}\end{aligned}$$

   Ainsi

$$T_N=Nv_{N+1}+\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2}\right)$$

4. On effectue alors la permutation des sommes dans la double somme

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2}\right) &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^k}{k^2}\\ &= \sum_{k=1}^{N}k\frac{(-1)^k}{k^2}=\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k}\end{aligned}$$

5. Ainsi

$$T_N=Nv_{N+1}+\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k}$$

Or on sait que

$$v_{N+1} \sim \frac{(-1)^{N+1}}{2(N+1)^2}$$

et ainsi (Nv_{N+1}) converge vers 0 ; de plus

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \longrightarrow -\ln 2$$

et ainsi finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\ln 2$$

Exercice III

1. Si $x > 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est une série alternée, dont le terme général en valeur absolue est $\frac{1}{n^x}$, qui décroît vers 0. On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées de Leibniz pour conclure que la série converge. Ainsi $F(x)$ est bien définie.

2. (a) Lorsque $x > 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est absolument convergente et ainsi d'après le théorème du produit de Cauchy de deux séries absolument convergente, la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$ est aussi absolument convergente, et on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} c_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right)^2 = F(x)^2$$

   (b) Soit $x > 0$, on a

$$c_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \times \frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-k)^x} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^x}$$

   On en déduit que $\sum c_n(x)$ est une série alternée.

   (c) En valeur absolue

$$|c_n(x)| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^x}$$

   Posons $f(u) = u(n-u)$ sur $[0, n]$. f est dérivable, et on a $f'(u) = n - 2u$. On en déduit les variations de f sur $[0, n]$:

u	0		$\frac{n}{2}$		n
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{n^2}{4}$	↘	0

Ainsi sur $[1, n-1]$, on a $0 < f(u) \leqslant \frac{n^2}{4}$. On en déduit que si $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $0 < k(n-k) \leqslant \frac{n}{2}$, puis $0 < (k(n-k))^x \leqslant \frac{n^{2x}}{4^x}$ et ainsi

$$|c_n(x)| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^x} \geqslant (n-1)\frac{4^x}{n^{2x}}$$

Si $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$, on a alors

$$|c_n(x)| \geqslant 4^x \frac{n-1}{n^{2x}}$$

or

$$4^x \frac{n-1}{n^{2x}} \sim \frac{4^x}{n^{2x-1}} > 0$$

avec $2x - 1 \leqslant 0$ puisque $x \leqslant \frac{1}{2}$: ainsi comme $\frac{4^x}{n^{2x-1}}$ ne tend pas vers 0, $(c_n(x))$ non plus et ainsi la série (alternée) $\sum c_n(x)$ diverge grossièrement.

(a) De manière classique, on a (x quelconque autre que 0 et n)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{n-x} = \frac{n}{x(n-x)}$$

et ainsi

$$\frac{1}{x(n-x)} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{n-x}\right]$$

Ainsi

$$\begin{aligned} c_n(1) &= (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right] \\ &= \frac{(-1)^n}{n}\left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k}\right] = \frac{(-1)^n 2H_{n-1}}{n} \end{aligned}$$

(b) On a donc $|c_n(1)| = \frac{2H_{n-1}}{n}$; on étudie alors la monotonie de $\frac{H_{n-1}}{n}$: on a

$$\frac{H_n}{n+1} - \frac{H_{n-1}}{n} = \frac{H_{n-1} + \frac{1}{n}}{n+1} - \frac{H_{n-1}}{n} = H_{n-1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}(1 - H_{n-1}) \leqslant 0$$

et ainsi la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n \geqslant 2}$ est décroissante.

(c) Comme $H_n \sim \ln n$, on a

$$\frac{H_{n-1}}{n} \sim \frac{\ln(n-1)}{n} \sim \frac{\ln(n-1)}{n-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi les hypothèses du critère de Leibniz sont vérifiées : la série produit de Cauchy $\sum_{n \geqslant 2} c_n(1)$ de la série harmonique alternée avec elle même est convergente.