Espaces vectoriels

Table des matières

I Programme officiel **4**

II Produit et somme d'espaces vectoriels **6**
A Produit d'espaces vectoriels . . . 6
B Somme de sous-espaces vectoriels . . . 8
C Somme directe de sous-espaces vectoriels . . . 9
D Sous-espaces supplémentaires . . . 10
E Bases adaptées . . . 11

III Sous-espaces stables et matrices par blocs **15**
A Sous-espace stable . . . 15
B Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace . . . 16
C Matrices par blocs . . . 17
1) Matrice définie par blocs . . . 17
2) Combinaison linéaire par blocs . . . 17
3) Produit matriciel par blocs . . . 18
4) Transposition par blocs . . . 19
D Matrice d'endomorphisme associée à une décomposition en sous-espaces stables . . . 19
E Opérations par bloc . . . 20

IV Compléments sur les déterminants **21**
A Déterminant des matrices triangulaires en blocs . . . 21
B Déterminant de Vandermonde . . . 23
C Déterminant satisfaisant une relation de récurrence linéaire d'ordre deux . . . 24
D Quelques techniques . . . 25
1) Déterminant anti-diagonaux . . . 25
2) Renversement de matrice . . . 25
E Autres techniques : voir exercices ! . . . 26

V Matrices semblables et trace **27**
A Définition . . . 27
B Trace d'une matrice carrée . . . 27
C Trace d'un endomorphisme . . . 28
D Quelques exemples . . . 29

VI Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées **30**
A Définition . . . 30
B Polynôme annulateur . . . 30
C Existence d'un polynôme annulateur non nul . . . 31
D Quelques propriétés . . . 32
E Polynôme annulateur et inverse d'une matrice . . . 32
F Polynôme annulateur et puissances de matrice . . . 32
G Polynôme annulateur et valeur propre . . . 34

VII Interpolation de Lagrange **35**
A La problématique . . . 35
B L'isomorphisme . . . 35
C Les polynômes élémentaires d'interpolation . . . 36
D Exemple . . . 37

VIII Exercices **39**
A Sommes de sous-espaces vectoriels . . . 39
B Calculs de déterminants . . . 39
C Déterminants récurrents d'ordre 2 . . . 40
D Déterminants et matrices en blocs . . . 41
E Déterminants de Vandermonde . . . 42
F Trace . . . 42
G Polynôme annulateur . . . 42
H Polynômes de Lagrange . . . 42
I Autres . . . 43

IX Exercices concours **43**

X Exercices corrigés **45**
A Déterminants récurrents d'ordre 2 . . . 45
B Déterminants et matrices en blocs . . . 48
C Déterminants de Vandermonde . . . 50
D Trace . . . 51
E Polynôme annulateur . . . 51

Index

base adaptée, 11
base adaptée à une décomposition, 11

caractérisation optimisée d'une somme directe, 9

déterminant de Vandermonde, 23

formule de Grassmann, 13

matrice définie par blocs, 17
matrices semblables, 27

polynôme annulateur, 30
polynôme d'endomorphisme, 30
polynôme d'interpolation de Lagrange, 35
polynôme de matrice, 30
polynôme minimal, 31
polynômes élémentaires d'interpolation de Lagrange, 36
produit d'espaces vectoriels, 7

somme des sous-espaces vectoriels, 8
somme directe, 9
sous espace stable, 15
sous-espaces supplémentaires, 10

trace d'un endomorphisme, 29
trace d'un projecteur et rang, 29
trace d'une matrice carrée, 27

I Programme officiel

Algèbre linaire

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :
– consolider les acquis de la classe de première année ;
– introduire de nouveaux concepts préliminaires à la réduction des endomorphismes : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, somme directe, sous-espaces stables, matrices par blocs, trace, polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées, polynômes interpolateurs de Lagrange ;
– passer du point de vue vectoriel au point de vue matriciel et inversement.
Le programme valorise les interprétations géométriques et préconise l'illustration des notions et résultats par de nombreuses figures.

---

a) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels

---

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \oplus E_i$.

Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.

Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

---

b) Matrices par blocs et sous-espaces stables

Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).
Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.

Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.

Si u et v commutent, alors le noyau de u est stable par v.

---

c) Trace

Trace d'une matrice carrée. Linéarité, trace d'une transposée. Relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.	Notation $\mathrm{tr}(A)$.

d) Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Polynôme annulateur. Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent. Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.	Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. Application au calcul de l'inverse et des puissances. Le noyau de $P(u)$ est stable par u.

e) Interpolation de Lagrange

Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$.	Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base. La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points est le polynôme constant égal à 1.
Déterminant de Vandermonde.	Lien avec le problème d'interpolation de Lagrange.

II Produit et somme d'espaces vectoriels

Dans ce paragraphe, on généralise à n entier non nul quelconque ce qui a été vu en première année avec $n = 2$.

A Produit d'espaces vectoriels

Soit $(E_i, \boxplus_i, \boxdot_i)_{i\in I}$, $I = \{1, \dots, n\}$ une famille finie de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On se propose de construire une structure d'espace vectoriel sur le produit cartésien $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$, en généralisant tout simplement le passage de $\mathbb{K}$ à $\mathbb{K}^n$. On définit pour cela une loi interne $+$ par :

$$\begin{array}{rccc} + : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) & \longmapsto & (x_i \boxplus_i y_i)_{i\in I} \end{array}$$

et une loi externe $.$ à domaine $\mathbb{K}$ par

$$\begin{array}{rccc} . : & \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ & (\lambda, (x_i)_{i\in I}) & \longmapsto & (\lambda \boxdot_i x_i)_{i\in I} \end{array}$$

Proposition 1. *$(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Preuve :
Comme il s'agit d'une structure d'espace vectoriel de base, on revient soigneusement à la définition.
• La loi $+$ est une loi interne à E ;
– $+$ est commutative : pour tout $x = (x_i)_{i\in I}$ et $y = (y_i)_{i\in I}$, on a

$$x + y = (x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i \boxplus_i y_i)_{i\in I} = (y_i \boxplus_i x_i)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I} + (x_i)_{i\in I} = y + x$$

– $+$ est associative : pour tout $x = (x_i)_{i\in I}$, $y = (y_i)_{i\in I}$ et $z = (z_i)_{i\in I}$, on a

$$\begin{array}{rcl} x + (y + z) & = & (x_i)_{i\in I} + ((y_i)_{i\in I} + (z_i)_{i\in I}) = (x_i)_{i\in I} + (y_i \boxplus_i z_i)_{i\in I} \\ & = & (x_i \boxplus_i (y_i \boxplus_i z_i))_{i\in I} = ((x_i \boxplus_i y_i) \boxplus_i z_i)_{i\in I} \\ & = & (x_i \boxplus_i y_i)_{i\in I} + (z_i)_{i\in I} = ((x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I}) + (z_i)_{i\in I} \\ & = & (x + y) + z \end{array}$$

– elle admet un élément neutre qui est $(0_i)_{i\in I}$:

$$(x_i)_{i\in I} + (0_i)_{i\in I} = (x_i + 0_i)_{i\in I} = (x_i)_{i\in I}$$

– tout élément $(x_i)_{i\in I}$ admet un symétrique qui est $(-x_i)_{i\in I}$ puisque

$$(x_i)_{i\in I} + (-x_i)_{i\in I} = (x_i + (-x_i))_{i\in I} = (0)_{i\in I}$$

• La loi interne vérifie les quatre propriétés de compatibilité : soient λ et μ deux scalaires, $x = (x_i)_{i\in I}$ et $y = (y_i)_{i\in I}$ deux éléments de E, on a :

$$\begin{array}{rcl} (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu).x & = & (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu).(x_i)_{i\in I} \\ & = & ((\lambda +_{\mathbb{K}} \mu) \boxdot_i x_i)_{i\in I} \\ & = & (\lambda \boxdot_i x_i \boxplus_i \mu \boxdot_i x_i)_{i\in I} \\ & = & (\lambda \boxdot_i x_i)_{i\in I} + (\mu \boxdot_i x_i)_{i\in I} \\ & = & \lambda.(x_i)_{i\in I} + \mu.(x_i)_{i\in I} \\ & = & \lambda.x + \mu.x \end{array}$$

puis

$$\begin{aligned}\lambda.(x+y) &= \lambda.((x_i)_{i\in I}+(y_i)_{i\in I})\\ &= \lambda.(x_i \dot{+}_i y_i)_{i\in I}\\ &= (\lambda \boxdot_i (x_i \dot{+}_i y_i))_{i\in I}\\ &= (\lambda \boxdot_i x_i \boxplus_i \lambda \boxdot_i y_i)_{i\in I}\\ &= (\lambda \boxdot_i x_i)_{i\in I}+(\lambda \boxdot_i y_i)_{i\in I}\\ &= \lambda.(x_i)_{i\in I}+\lambda.(y_i)_{i\in I}\\ &= \lambda.x+\lambda.y\end{aligned}$$

ainsi que

$$\lambda.(\mu.x)=\lambda.(\mu.(x_i)_{i\in I})=\lambda.(\mu\boxdot_i x_i)=(\lambda\boxdot_i(\mu\boxdot_i x_i))_{i\in I}=((\lambda._{\mathbb{K}}\mu)\boxdot_i x_i)_{i\in I}=(\lambda._{\mathbb{K}}\mu).(x_i)_{i\in I}=(\lambda._{\mathbb{K}}\mu)x$$

et pour finir

$$1.x=1.(x_i)_{i\in I}=(1\boxdot_i x_i)_{i\in I}=(x_i)_{i\in I}=x$$

★

Définition 1. *$(E,+,.)$ est appelé le produit des espaces vectoriels $(E_i)_{i\in I}$.*

Proposition 2. *Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie d'espaces vectoriels de dimension finie. Alors le produit cartésien $E=\prod_{i=1}^{n} E_i$ est aussi de dimension finie et on a :*

$$\dim \prod_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$$

Preuve :
On procède en toute généralité, la construction d'une base venant assez naturellement comme on va le voir. Soit

$$(e_{i,1},\dots,e_{i,d_i})$$

une base de E_i avec $d_i=\dim E_i$. Soit $x\in E$, $x=(x_1,\dots,x_n)$ et pour tout i entre 1 et n,

$$x_i=\sum_{j=1}^{d_i} a_{i,j}e_{i,j}$$

et ainsi nous obtenons une décomposition naturelle de x

$$\begin{aligned}x &= \left(\sum_{j=1}^{d_i} a_{i,j}e_{i,j}\right)_{i\in I}\\ &= \sum_{i=1}^{n}(0,\dots,0,\sum_{j=1}^{d_i} a_{i,j}e_{i,j},0,\dots,0)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d_i} a_{i,j}.f_{i,j}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
f_{1,1} &= (e_{1,1}, 0, \dots, 0) \\
&\vdots \\
f_{1,d_1} &= (e_{1,d_1}, 0, \dots, 0) \\
f_{2,1} &= (0, e_{2,1}, 0, \dots, 0) \\
&\vdots \\
f_{2,d_2} &= (0, e_{2,d_2}, 0, \dots, 0) \\
&\vdots \\
f_{n,1} &= (0, \dots, 0, e_{n,1}) \\
&\vdots \\
f_{n,d_n} &= (0, \dots, 0, e_{n,d_n})
\end{aligned}$$

Cette famille est donc génératrice. Elle est libre puisque si

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d_i} a_{i,j}.f_{i,j} = 0$$

on a

$$\left(\sum_{j=1}^{d_i} a_{i,j} e_{i,j} \right)_{i \in I} = 0$$

c'est à dire que pour tout i, $\sum_{j=1}^{d_i} a_{i,j} e_{i,j} = 0$ et comme $(e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i})$ libre, pour tout j on a $a_{i,j} = 0$.

Le cardinal de cette base étant $d_1 + \cdots + d_n$, on en déduit la formule de la dimension du produit. ★

B Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 2. *Soit $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On appelle somme des espaces $E_1, \dots, E_n$ l'ensemble noté $E_1 + \cdots + E_n = \sum_{i=1}^{n} E_i$ défini par*

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \, , \, (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i \right\}$$

Proposition 3. *Soit $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Alors $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve :

Par définition, $\sum_{i=1}^{n} E_i \subset E$.

La somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ n'est pas vide puisque $0 = 0 + \cdots + 0 \in \sum_{i=1}^{n} E_i$.

Soit x, y deux éléments de la somme, λ et μ des scalaires, on peut écrire

$$x = x_1 + \cdots + x_n \qquad y = y_1 + \cdots + y_n$$

avec $(x_i, y_i) \in E_i^2$ pour tout i. Ainsi

$$\lambda x + \mu y = \lambda(x_1 + \cdots + x_n) + \mu(y_1 + \cdots + y_n) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i)$$

Or comme E_i est un sous-espace vectoriel de E, $\lambda x_i + \mu y_i \in E_i$ et ainsi on a $\lambda x + \mu y \in \sum_{i=1}^{n} E_i$. ★

Donnons une autre preuve, utile pour la suite :

Preuve :
L'application

$$\theta : \prod_{i=1}^{n} E_i \to E$$

définie par

$$\theta((x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

est linéaire : en effet, on a

$$\begin{aligned} \theta(\lambda(x_1, \ldots, x_n) + \mu(y_1, \ldots, y_n)) &= \theta((\lambda x_1 + \mu x_1, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i + \mu \sum_{i=1}^{n} y_i \\ &= \lambda\theta(x) + \mu\theta(y) \end{aligned}$$

D'autre part, par définition de la somme, on a $\operatorname{Im}\theta = \sum_{i=1}^{n} E_i$ qui est donc un sous-espace vectoriel de E.

★

C Somme directe de sous-espaces vectoriels

DÉFINITION 3. *Soit $(E_1, \ldots, E_n)$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On dit que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe si tout vecteur de cette somme se décompose de manière unique comme une somme d'éléments de E_1,...,E_n. On note alors*

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$$

En première année, on a vu qu'une somme de deux sous-espaces vectoriels est directe si et seulement si l'intersection est réduite au singleton $\{0\}$. Attention, cela ne se généralise pas, ou plutôt, les conditions sont beaucoup plus complexes. Il ne suffit pas que les intersections soient deux à deux réduites au singleton $\{0\}$.

On a la *caractérisation* optimisée suivante :

PROPOSITION 4. *Une somme de sous-espaces vectoriels est directe si et seulement si le vecteur nul se décompose de manière unique (par la décomposition triviale).*

Preuve :
Les décompositions existent de toutes façon par définition de la somme.

Si la somme est directe, le vecteur nul admet une unique décomposition qui est bien sûr la décomposition triviale

$$0 = \underbrace{0}_{in E_1} + \cdots + \underbrace{0}_{\in E_n}$$

Réciproquement, on suppose que 0 se décompose de manière unique. On montre que tous les autres vecteurs aussi. En effet, si x est dans la somme et que x possède deux décompositions sur la somme $E_1 + \cdots + E_n$, alors avec des notations évidentes

$$x = x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n$$

et ainsi

$$0 = \underbrace{(x1 - y_1)}_{\in E_1} + \cdots + \underbrace{(x_n - y_n)}_{\in E_n}$$

On obtient donc une décomposition de 0, qui est donc forcément la décomposition triviale et ainsi, pour tout i, $x_i - y_i$ soit encore $x_i = y_i$ ce qui prouve l'unicité. Ainsi la somme est directe. ★

En pratique, pour montrer qu'une somme est directe, on montre[1] que si $0 = x_1 + \cdots + x_n$ avec pour tout i, $x_i \in E_i$, alors $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

PROPOSITION 5. *La somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe si et seulement si l'application linéaire (qui est surjective par définition de la somme de sous-espaces vectoriels)*

$$\theta : \prod_{i=1}^{n} E_i \to \sum_{i=1}^{n} E_i$$

définie par

$$\theta((x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

est injective, si et seulement si donc elle est un isomorphisme.

Preuve :

On remarque que $\operatorname{Ker}\theta$ est l'espace des décompositions du vecteur nul. On a vu aussi que $\operatorname{Im}\theta = \sum_{i=1}^{n} E_i$ par définition de la somme de sous-espaces vectoriels. Ainsi θ est un isomorphisme si et seulement si θ injective (ce n'est pas ici exceptionnellement pour une raison de dimension) c'est à dire si et seulement si le vecteur nul se décompose de manière unique (par la décomposition triviale) , c'est à dire si et seulement si la somme est directe. ★

D Sous-espaces supplémentaires

DÉFINITION 4. *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On dit que F et G sont* supplémentaires *dans E si $E = F \oplus G$, c'est à dire, en d'autres termes, si tout vecteur de E se décompose et cela de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.*

Par exemple, on rappelle que si E est un espace vectoriel de dimension finie, et que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors les espaces F et G définis par fractionnement de la base par

$$F = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_p) \qquad G = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$$

1. cela ressemble beaucoup à la méthodologie pour montrer la liberté d'une famille.

sont supplémentaires dans E.

On rappelle qu'à partir de deux sous-espaces supplémentaires, on définit les notions de projections et symétries vectorielles.

E Bases adaptées

Définition 5. *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie E. On dit qu'une base $\mathcal{E}$ de E est adaptée à F si une sous famille de $\mathcal{E}$ est une base de F.*

On peut aussi considérer une base de F et la compléter en une base de E, d'après le théorème de la base incomplète, pour obtenir une base adaptée à F.

Proposition 6. *Soit une décomposition de E en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, on suppose que chaque espace E_i est muni d'une base $(e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i})$. Alors la famille $(e_{1,1}, \dots, e_{1,d_1}, e_{2,1}, \dots, e_{2,d_2}, \dots, e_{n,1}, \dots, e_{n,d_n})$ est une base de E.*

Définition 6. *La base obtenue est adaptée à chaque sous-espace. On dit que la base obtenue est une base adaptée à la décomposition.*

Preuve :
La famille est libre : si

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d_i} a_{i,j} e_{i,j} = 0$$

alors

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{d_i} a_{i,j} e_{i,j}}_{\in E_i} = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{0}_{\in E_i}$$

et par unicité de la décomposition on a pour tout i,

$$\sum_{j=1}^{d_i} a_{i,j} e_{i,j} = 0$$

Or la famille $(e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i})$ est libre et ainsi pour tout j de $\{1, \dots, d_i\}$, $a_{i,j} = 0$.

La famille est génératrice : si $x \in E$, on écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in E_i$ puis pour chaque i, on écrit

$$x_i = \sum_{j=1}^{d_i} a_{i,j} e_{i,j}$$

et ainsi on obtient

$$x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d_i} a_{i,j} e_{i,j}$$

★

De manière réciproque, on a le résultat suivant :

Proposition 7. *Soit E un espace vectoriel muni d'une base $(e_1, \dots, e_p)$, que l'on fractionne*

$$(\underbrace{e_1, \dots, e_{d_1}}_{d_1 \text{ vecteurs}}, \underbrace{e_{d_1+1}, \dots, e_{d_1+d_2}}_{d_2 \text{ vecteurs}}, e_{d_1+d_2+1}, \dots, e_{d_1+\dots+d_{n-1}}, \underbrace{e_{d_1+\dots+d_{n-1}+1}, \dots, e_{d_1+\dots d_n}}_{d_n \text{ vecteurs}})$$

On pose $E_1 = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{d_1})$,

$$E_2 = \text{Vect}(e_{d_1+1}, \dots, e_{d_1+d_2}) \quad \cdots \quad E_n = \text{Vect}(e_{d_1+\dots+d_{n-1}+1}, \dots, e_{d_1+\dots+d_n})$$

Alors on a

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$$

Preuve :
On renomme les vecteurs de la base en posant pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, d_i\}$

$$e_{i,j} = e_{d_1+\dots+d_{i-1}+j}$$

Soit $x \in E$, on décompose x sur la base

$$x = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{d_i} a_{i,j} e_{i,j}}_{=x_i \in E_i}$$

ce qui nous donne une décomposition de x sur la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$. Ainsi on a déjà $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$.

Si on a $0 = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout i, on décompose chaque x_i sur $(e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i})$ qui est une base de E_i (génératrice par définition et libre comme sous-famille d'une famille libre) :

$$x_i = \sum_{j=1}^{d_i} a_{i,j} e_{i,j}$$

et ainsi

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d_i} a_{i,j} e_{i,j}$$

Nous avons donc une décomposition du vecteur nul sur la base initiale de E : c'est forcément la décomposition triviale et ainsi pour tout i de $\{1, \dots, n\}$ et tout j de $\{1, \dots, d_i\}$, $a_{i,j} = 0$. Ainsi chaque x_i est nul, ce qui prouve l'unicité de la décomposition du vecteur nul sur la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$. Ainsi la somme est directe. ★

Proposition 8 (caractérisation dimensionnelle). *Soient E_1,...,E_n des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Alors on a*

$$\dim \sum_{i=1}^{n} E_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$$

De plus, il y a égalité si et seulement si la somme est directe.

Preuve :
L'application

$$\theta : \prod_{i=1}^{n} E_i \to \sum_{i=1}^{n} E_i$$

définie par

$$\theta((x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

est un morphisme surjectif. D'après le théorème du rang, on sait que

$$\dim \prod_{i=1}^{n} E_i = \operatorname{rg} \theta + \dim \operatorname{Ker} \theta = \dim \sum_{i=1}^{n} E_i + \dim \operatorname{Ker} \theta$$

et ainsi on a

$$\dim \prod_{i=1}^{n} E_i \geqslant \dim \sum_{i=1}^{n} E_i$$

et il y a égalité si et seulement si $\dim \operatorname{Ker} \theta = 0$ ce qui signifie aussi que la somme est directe. ★

COROLLAIRE **1**. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et E_1,...,E_n des sous-espaces vectoriels. Alors deux des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :*

1) $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$

2) $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$

3) $\sum_{i=1}^{n} E_i$ *est une somme directe*

On a alors dans ces conditions $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Preuve :
Si on a 1) et 2), d'après la proposition précédente, la somme est directe.
Si on a 1) et 3), on a 2) d'après la formule de la dimension d'une somme directe.
Si on a 2) et 3), la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ contenue dans E a la même dimension que E, et donc par théorème, c'est E.

Le fait d'avoir 1) et 2) montre que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. ★

PROPOSITION **9** (formule de Grassmann). *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Alors $F + G$ et $F \cap G$ sont de dimension finie et on a la formule dite de* Grassman

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

Preuve :
On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} u : F \times G &\longrightarrow F + G \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

qui est surjective. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim F \times G = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim(F+G) + \dim \operatorname{Ker} u$$

Or on a

$$(x,y) \in \operatorname{Ker} u \iff u(x,y) = 0 \iff x+y=0 \iff x=-y$$

Ainsi $\operatorname{Ker} u = \{(x,y) \in F \times G\,,\ x=-y\} = \{(x,-x)\,,\ x \in F \cap G\}$. Or l'application

$$\begin{array}{rccc} \theta : & F \cap G & \longrightarrow & \operatorname{Ker} u \\ & x & \longmapsto & (x,-x) \end{array}$$

est un isomorphisme : elle est linéaire (pas de difficultés), injective (immédiat), surjective vu la description de $\operatorname{Ker} u$. Ainsi

$$\dim \operatorname{Ker} u = \dim F \cap G$$

et finalement

$$\dim F + \dim G = \dim(F \times G) = \dim(F+G) + \dim F \cap G$$

et ainsi on obtient la formule de Grassmann

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

★

III Sous-espaces stables et matrices par blocs

A Sous-espace stable

Définition 7. *Soit u un endomorphisme de E et F un sous-espace de E. On dit que F est* stable *par u si $u(F) \subset F$.*

La méthodologie issue de la définition pour montrer que F est stable est donc : on prend un élément de $u(F)$ et on démontre qu'il est dans F : cela commence donc par :

Soit $y \in u(F)$, il existe $x \in F$, $y = u(x)$, et ensuite ...pour conclure que $y = u(x) \in F$; ceci revient à prendre x de F, et à vérifier que $u(x)$ est aussi dans F.

Définition 8. *Soit F un sous-espace stable de E par un endomorphisme u, on définit l'endomorphisme noté $u_{/F}^{\backslash F}$ appelé endomorphisme induit par*

$$\begin{aligned} u_{/F}^{\backslash F} : F &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto u(x) \end{aligned}$$

En effet la fonction est bien définie par stabilité et la linéarité est acquise par restriction.

Une proposition qui va nous permettre d'appliquer la méthodologie :

Proposition 10. *Soit u et v deux endomorphismes de E. Si u et v commutent, alors* $\operatorname{Ker} u$ *et* $\operatorname{Im} u$ *sont stables par v.*

Preuve :
Montrons que $\operatorname{Ker} u$ stable par v, c'est à dire que $v(\operatorname{Ker} u) \subset \operatorname{Ker} u$.
Soit $y \in v(\operatorname{Ker} u)$, il existe $x \in \operatorname{Ker} u$, $y = v(x)$. Montrons que $y \in \operatorname{Ker} u$. On a

$$u(y) = u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(0) = 0$$

et ainsi $y \in \operatorname{Ker} u$. Donc $v(\operatorname{Ker} u) \subset \operatorname{Ker} u$.

Montrons que $\operatorname{Im} u$ est stable par v, c'est à dire que $v(\operatorname{Im} u) \subset \operatorname{Im} u$.
Soit $y \in v(\operatorname{Im} u)$, il existe $z \in \operatorname{Im} u$, $y = v(z)$ puis il existe $x \in E$, $z = u(x)$. Alors

$$y = v(z) = v(u(x)) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u(v(x))$$

et ainsi $y \in \operatorname{Im} u$. Donc $v(\operatorname{Im} u) \subset \operatorname{Im} u$ d'où la stabilité. ★

Corollaire 2. *Le noyau et l'image d'un endomorphisme sont stable par cet endomorphisme.*

Preuve :
En effet un endomorphisme commute avec lui-même. Ceci dit,

$$u(\operatorname{Ker} u) = \{0\} \subset \operatorname{Ker} u \text{ et } u(\operatorname{Im} u) \subset \operatorname{Im}(u)$$

de manière évidente. ★

B Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace

Proposition 11. *Soit u un endomorphisme de E de dimension finie et F un sous-espace stable de E. On considère une base $\mathcal{E}$ de E adaptée à F. On note*

$$\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$$

avec $(e_1, \dots, e_p)$ base de F. Alors la matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{E}$ est dite « triangulaire supérieure par blocs » de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$, les blocs diagonaux étant carrés.

Preuve :
On note $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrons que

$$\forall i \in \{p+1, n\}\,,\ \forall j \in \{1, \dots, p\}\,,\ m_{i,j} = 0$$

Soit $j \in \{1, \dots, p\}$, $e_j \in F$ et donc par stabilité de l'espace F on a $u(e_j) \in F$ et ainsi $u(e_j)$ est une combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_p)$. Comme par définition de la matrice d'une application linéaire selon une base on a

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} e_i$$

on obtient que $m_{p+1,j} = \cdots = m_{n,j} = 0$. ★

C Matrices par blocs

On a vu dans le paragraphe précédent un cas de matrice dont la présentation naturelle fait apparaître des « blocs ». Donnons une définition générale :

1) Matrice définie par blocs

Définition 9. *On appelle matrice définie par blocs toute matrice de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,j} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & \cdots & A_{i,j} & \cdots & A_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,j} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix}$$

où pour tout i de $\{1,\dots,n\}$, $A_{i,1}$,...,$A_{i,p}$ sont des sous-matrices ayant le même nombre de lignes et pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$, $A_{1,j}$,...,$A_{n,j}$ sont des sous-matrices ayant le même nombre de colonnes.

2) Combinaison linéaire par blocs

Proposition 12. *Soient A et B deux matrices définies par blocs*

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,j} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & \cdots & A_{i,j} & \cdots & A_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,j} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,j} & \cdots & B_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{i,1} & \cdots & B_{i,j} & \cdots & B_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{n,1} & \cdots & B_{n,j} & \cdots & B_{n,p} \end{pmatrix}$$

avec $A_{i,j}$ de même taille que $B_{i,j}$ pour tout (i,j) de $\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,p\}$. Alors si λ et μ sont des scalaires, on a

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} + \mu B_{1,1} & \cdots & \lambda A_{1,j} + \mu B_{1,j} & \cdots & \lambda A_{1,p} + \mu B_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{i,1} + \mu B_{i,1} & \cdots & \lambda A_{i,j} + \mu B_{i,j} & \cdots & \lambda A_{i,p} + \mu B_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{n,1} + \mu B_{n,1} & \cdots & \lambda A_{n,1} + \mu B_{n,j} & \cdots & \lambda A_{n,p} + \mu B_{n,p} \end{pmatrix}$$

c'est à dire qu'une combinaison linéaire de matrices en blocs compatibles est égale à la matrice des combinaisons linéaires des blocs.

3) Produit matriciel par blocs

Proposition 13. *Soit A et B des matrices en blocs*

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,j} & \cdots & A_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & \cdots & A_{i,j} & \cdots & A_{i,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,j} & \cdots & A_{n,m} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,j} & \cdots & B_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{i,1} & \cdots & B_{i,j} & \cdots & B_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{m,1} & \cdots & B_{m,j} & \cdots & B_{m,p} \end{pmatrix}$$

de sorte que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, p\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$, le nombre de colonnes de $A_{i,k}$ soit égal au nombre de lignes de $B_{k,j}$.

Alors le produit matriciel $C = AB$ peut être calculé par blocs de sorte que

$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,j} & \cdots & C_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{i,1} & \cdots & C_{i,j} & \cdots & C_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & C_{n,j} & \cdots & C_{n,p} \end{pmatrix}$$

avec

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}\,,\ \forall j \in \{1, \dots, p\}\,,\ C_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} A_{i,k} B_{k,j}$$

Par exemple, en faisant bien attention à l'ordre (non commutativité à priori)

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

Définition 10. *On dira que la matrice précédente est triangulaire supérieure par blocs lorsque*

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \forall j \in \{1, \dots, p\}\,,\ i > j \Longrightarrow A_{i,j} = (0)$$

Par exemple, une matrice triangulaire supérieure par blocs

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 7 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 8 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -2 \end{array}\right)$$

Définition 11. *On dit qu'une matrice carrée est diagonale par bloc si elle est triangulaire supérieure et inférieure par blocs avec des blocs diagonaux carrés.*

Par exemple, une matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Proposition 14. *Pour une matrice diagonale par blocs, $k \geqslant 0$, le calcul de la puissance k-ième s'effectue de la façon suivante :*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_n^k \end{pmatrix}$$

Proposition 15. *Une matrice diagonale par blocs est inversible si et seulement si tous les blocs diagonaux sont inversibles et on a :*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Dans le cas où la matrice est inversible, les puissances k-ième se calculent aussi de la même façon avec $k \in \mathbb{Z}$.

4) Transposition par blocs

Proposition 16. *Si $A = (A_{i,j})_{n,p}$ une matrice définie en blocs, alors $A^T = (A_{j,i}^T)_{p,n}$, c'est à dire*

$$A = A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,j} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & \cdots & A_{i,j} & \cdots & A_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,j} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} A_{1,1}^T & \cdots & A_{j,1}^T & \cdots & A_{n,1}^T \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1,i}^T & \cdots & A_{j,i}^T & \cdots & A_{n,i}^T \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1,p}^T & \cdots & A_{j,p}^T & \cdots & A_{n,p}^T \end{pmatrix}$$

D Matrice d'endomorphisme associée à une décomposition en sous-espaces stables

On généralise ce que l'on a vu pour un sous-espace stable d'un endomorphisme.

PROPOSITION **17.** *Soit u un endomorphisme de E de dimension finie de sorte que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ avec $F_1, \dots, F_n$ stables par u. On note pour tout i*

$$(e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i})$$

une base de F_i et on considère la base $\mathcal{E}$ de E

$$(e_{1,1}, \dots, e_{1,d_1}, e_{2,1}, \dots, e_{2,d_2}, \dots, e_{n,1}, \dots, e_{n,d_n})$$

Alors la matrice de u dans la base $\mathcal{E}$ est de la forme diagonale en blocs

$$\begin{pmatrix} A_1 & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & A_n \end{pmatrix}$$

avec A_i la matrice de la restriction de u à F_i par rapport à la base $(e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i})$.

E Opérations par bloc

Que ce soit pour des opérations matricielles (résolution de systèmes, inversion de matrices), ou de calcul de déterminants, on pourra lorsque les conditions s'y prêtent, opérer par blocs, ce qui peut dans certains cas accélérer et/ou simplifier les calculs et même la rédaction.

Par exemple, pour résoudre un sytème linéaire écrit matriciellement $AX = B$, on pourra écrire (avec compatibilité des tailles)

$$A = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

et on aura

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} CX_1 + DX_2 = B_1 \\ EX_1 + FX_2 = B_2 \end{cases}$$

Pour le calcul d'un déterminant d'une matrice donnée en blocs, on pourra écrire par exemple

$$\begin{vmatrix} A & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ B & C - B \end{vmatrix}$$

qui correspond à des opérations sur les colonnes simultannées mais indépendantes, que l'on schématise par exemple par $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$.

IV Compléments sur les déterminants

A Déterminant des matrices triangulaires en blocs

Un des intérêts des sous-espaces stables d'un endomorphisme est de pouvoir décomposer le calcul d'un déterminant. On commence par le cas élémentaire :

Proposition 18. *Soit M une matrice triangulaire en blocs de la forme*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

avec A et C carrées. Alors $\det M = \det A \times \det C$.

Preuve :
Exit, la preuve théorique. On écrit la décomposition matricielle en blocs

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n A + 0 \times 0 & I_n B + 0 \times I_p \\ 0 \times A + C \times 0 & 0 \times B + C \times I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

et ainsi

$$\det M = \det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$$

et en développant selon la première ligne de façon itérée, on a

$$\det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det C$$

et en développant selon la dernière ligne de façon itérée, on a

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \det A$$

Ainsi $\det M = \det A \times \det B$. ★

Proposition 19. *Soit M une matrice carrée triangulaire supérieure en blocs, c'est à dire de la forme*

$$M = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{p-1,p} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{p,p} \end{bmatrix}$$

où les matrices $A_{i,j}$ sont nulles si $i > j$ et les matrices $A_{i,i}$ des matrices carrées. Alors

$$\det M = \prod_{i=1}^{p} \det A_{i,i}$$

Par transposition, on a un résultat analogue pour les matrices triangulaires inférieures en blocs.

Preuve :
On procède par récurrence sur le nombre p de blocs de la diagonale. Pour $p = 1$, c'est évident. Pour $p = 2$, c'est la cas initial du paragraphe précédent. On le suppose alors au rang p avec $p \geqslant 2$. On considère alors une matrice M triangulaire supérieure de matrice de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} & A_{1,p+1} \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{p-1,p} & A_{p-1,p+1} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{p,p} & A_{p,p+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & A_{p+1,p+1} \end{pmatrix}$$

On peut voir M comme une matrice de type du cas initial :

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{p-1,p} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{p,p} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_{1,p+1} \\ \vdots \\ A_{p-1,p+1} \\ A_{p,p+1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_{p+1,p+1} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

d'où d'après le cas initial,

$$\det M = \det \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{p-1,p} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{p,p} \end{bmatrix} \times \det A_{p+1,p+1}$$

et ainsi par hypothèse de récurrence

$$\det M = \prod_{i=}^{p} \det A_{i,i} \times \det A_{p+1,p+1} = \prod_{i=1}^{p+1} \det A_{i,i}$$

ce qui achève notre récurrence. ★

B Déterminant de Vandermonde

On considère n scalaires $x_1, \dots, x_n$ et on pose

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \det(x_i^{j-1})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

Définition 12. *$V(x_1, \dots, x_n)$ est appelé* déterminant de Vandermonde.

• Pour $n = 1$, $V(x_1) = 1$, produit vide égal à 1 dans la formule générale.
• Pour $n = 2$,

$$V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

• Pour $n = 3$,

$$V(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

La bonne méthode (à l'ordre 3, qu'importe, on peut s'en sortir avec d'autres opérations) est d'effectuer

$$C_3 \leftarrow C_3 - x_1 C_2 \qquad C_2 \leftarrow C_2 - x_1 C_1$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, x_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \end{aligned}$$

• La bonne méthodologie est donc la suivante (il y des variantes équivalentes) : on effectue les opérations suivantes (dans l'ordre indiquée successivement)

$$C_n \leftarrow C_n - x_1 C_{n-1} \cdots C_2 \leftarrow C_2 - x_1 C_1$$

On obtient

$$\begin{aligned} V(x_1, \dots, x_n) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

et on factorise chaque ligne

$$V(x_1, \dots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

soit donc

$$V(x_1,\dots,x_n)=\left[\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\right]V(x_2,\dots,x_n)$$

On en déduit alors[2]

$$V(x_1,\dots,x_n)=\left[\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\right]\left[\prod_{j=3}^{n}(x_j-x_2)\right]\cdots\left[\prod_{j=n-2}^{n}(x_j-x_{n-3})\right]V(x_{n-1},x_n)$$

et comme $V(x_{n-1},x_n)=\begin{vmatrix}1 & x_{n-1}\\ 1 & x_n\end{vmatrix}=x_n-x_{n-1}$, on obtient finalement

$$V(x_1,\dots,x_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

PROPOSITION **20.** *Ainsi un déterminant de Vandermonde est non nul si et seulement ses termes de définition sont deux à deux distincts ou en d'autres termes, une matrice de Vandermonde est inversible si et seulement si ses termes de définition sont deux à deux distincts.*

Exemple : déterminer $V(1,2,3,\dots,n)$.

☞ On a

$$V(1,2,3,\dots,n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)=\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{k=1}^{i-1}k=\prod_{i=1}^{n-1}i!=1!2!3!\cdots(n-1)!$$

C Déterminant satisfaisant une relation de récurrence linéaire d'ordre deux

Les suites récurrentes linéaires d'ordre deux étant au programme, de première année, il s'agira d'une situation courante. Donnons un simple exemple. On considère le déterminant

$$D_n=\begin{vmatrix}3 & 1 & & (0)\\ 2 & 3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1\\ (0) & & 2 & 3\end{vmatrix}$$

$D_1=3$, $D_2=4$ et pour $n\geqslant 3$, on développe selon la première ligne

$$D_n=3D_{n-1}-\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & & (0)\\ 0 & 3 & 1 & \ddots & \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & 0\\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ (0) & & 0 & 2 & 3\end{vmatrix}_{n-1}$$

et en développant le second déterminant selon la première colonne

$$D_n=3D_{n-1}-2D_{n-2}$$

2. les puristes feront une belle récurrence ; la variante est d'obtenir la relation

$$V(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=(x_{n+1}-x_1)\cdots(x_{n+1}-x_n)V(x_1,\dots,x_n)$$

Ainsi, la suite $(D_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 de polynôme $P = X^2 - 3X + 2$. Les racines sont 1 et 2. Pour simplifier les calculs, on définit D_0 de sorte que $D_2 = 3D_1 - 2D_0$ soit $4 = 9 - 2D_0$ soit $D_0 = \frac{5}{2}$. Il existe des constantes λ et μ de sorte que pour tout n,

$$D_n = \lambda 1^n + \mu 2^n$$

avec $D_0 = \lambda + \mu = \frac{5}{2}$ et $D_1 = \lambda + 2\mu = \frac{5}{2} + \mu = 3$, d'où $\mu = \frac{1}{2}$ et $\lambda = 2$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \geqslant 1\,,\ D_n = 2 + \frac{1}{2}2^n = 2 + 2^{n-1}}$$

D Quelques techniques

1) Déterminant anti-diagonaux

On a $\begin{vmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{vmatrix} = -ab$ et

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{vmatrix} = -abc$$

De même

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-d) \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-d)c \begin{vmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{vmatrix} = abcd$$

On peut aussi procéder par échange de colonnes (ou de lignes) :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

On va généraliser dans le paragraphe suivant.

2) Renversement de matrice

• Pour une matrice de taille n, que se passe-t-il pour le déterminant lorsque l'on fait glisser la première colonne à la dernière place ? Précisément, si $A = (C_1 \cdots C_n)$, que vaut $\det(C_2 \cdots C_n C_1)$?

Il y a en fait $n - 1$ échanges de colonne : on échange la colonne 1 avec la deux, puis la 2 avec la 3,..., et la $n - 1$ ième avec la n ième.

• Maintenant, si $A = (C_1 \cdots C_n)$, que vaut $\det(C_n \cdots C_1)$? On utilise le principe précédent :
– la première colonne est mise à la fin : $n - 1$ échanges ; on a le tableau $C_2 \cdots C_n C_1$;
– la première colonne est mise à l'avant dernière places : $n - 2$ échanges ; on a le tableau $C_3 \cdots C_n C_2 C_1$.
Il y aura en tout

$$n - 1 + n - 2 + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

échanges de colonnes et ainsi

$$\det(C_n \cdots C_1) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det(C_1 \cdots C_n)$$

On en fait

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 1[4] \text{ ou } n \equiv 0[4] \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, on a 4 cas :
– si $n = 4k$, $\frac{n(n-1)}{2} = 2k(n-1)$ pair
– si $n = 4k+1$, $\frac{n(n-1)}{2} = (4k+1)2k$ pair
– si $n = 4k+2$, $\frac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+1)$ impair
– si $n = 4k+3$, $\frac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+3)$ impair.

Le paragraphe précédent peut-être vu comme un cas particulier de ce paragraphe. On a

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & d_n \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ d_1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d_1 \cdots d_n$$

E Autres techniques : voir exercices !

V Matrices semblables et trace

A Définition

Définition 13. *On dit qu'une matrice carrée A est semblable à une matrice A' de même taille s'il existe une matrice inversible P de même taille telle que*

$$A' = P^{-1}AP$$

Proposition 21. *La relation « être semblable » dite de similitude est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Preuve :
En effet :
• Si A est une matrice, elle est semblable à elle même : $A = I_n^{-1}AI_n$.
• Si A est semblable à B, il existe P inversible telle que $A' = P^{-1}AP$ et alors $A = PA'P^{-1} = Q^{-1}A'Q$ avec $Q = P^{-1}$.
• Si A est semblable à A' et A' semblable à A'', alors $A' = P^{-1}AP$ et $A'' = Q^{-1}A'Q$ et ainsi $A'' = (PQ)^{-1}A(PQ)$ et ainsi A'' est semblable à A. ★

Définition 14. *On dit alors aussi que A et A' sont semblables.*

On notera que :
– la seule matrice semblable à la matrice identité est la matrice identité.
– la seule matrice semblable à la matrice nulle est la matrice nulle.

B Trace d'une matrice carrée

Définition 15. *On appelle trace d'une matrice carrée la somme des éléments de sa diagonale. On note* $\operatorname{tr} A$ *la trace de la matrice A. Si $A = (a_{i,j})$, on a*

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

On définit ainsi une application tr_n *:*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{tr}_n : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \operatorname{tr} A \end{array}$$

Proposition 22. *La trace est une forme linéaire non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Preuve :
Soit A et B deux matrices, λ et μ deux scalaires, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) &= \operatorname{tr}((\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda \operatorname{tr} A + \mu \operatorname{tr} B \end{aligned}$$

et comme $\operatorname{tr} I_n = n$, nous avons bien une forme linéaire non nulle. ★

De manière évidente :

Proposition 23. *Une matrice et sa transposée ont la même trace.*

Beaucoup moins évident :

Proposition 24. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors les produits AB et BA ont un sens et on a :*

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$$

Preuve :
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors posons

$$C = AB = (c_{i,j})_{n,n} = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}\right)_{n,n} \qquad D = BA = (d_{i,j})_{p,p} = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,j}\right)_{p,p}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} AB &= \operatorname{tr} C = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,i} \\ \operatorname{tr} BA &= \operatorname{tr} D = \sum_{i=1}^{p} d_{i,i} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,i} \end{aligned}$$

et ainsi $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ (même double somme en échangeant les rôles de i et k). ★

Cette propriété possède un premier prolongement : la détermination du noyau de la trace[3]

C Trace d'un endomorphisme

Proposition 25. *Toutes les matrices semblables ont la même trace.*

3. On considère la forme linéaire

$$\operatorname{tr}_n : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

D'après le théorème du rang, on a

$$n^2 = \operatorname{rg}\operatorname{tr} + \dim \operatorname{Ker}\operatorname{tr}$$

et comme tr non nul $\operatorname{Im}\operatorname{tr} \neq \{0\}$ avec $\operatorname{Im}\operatorname{tr} \subset \mathbb{K}$ et ainsi forcément $\operatorname{Im}\operatorname{tr} = \mathbb{K}$. On en déduit que le noyau de tr est de dimension $n^2 - 1$: c'est ce que l'on appelle un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a une équation du noyau qui est

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = 0$$

si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ce qui détermine déjà $\operatorname{Ker} u$.

D'autre part, on dispose de tout un tas de matrices dans le noyau puisque $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$. Ainsi on a

$$\{AB - BA\,,\ (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2\} \subset \operatorname{Ker}\operatorname{tr}$$

La question que l'on peut se poser, que l'on doit se poser plus précisément, est : y-a-t-il égalité ? Cela donnerait une autre façon de « voir » le noyau de la trace. La réponse est oui, mais ce n'est pas facile.

Un second prolongement : quelles sont les formes linéaires φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de sorte que

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}^2)\,,\ \varphi(AB) = \varphi(BA)$$

La réponse est : seule la trace convient, à un coefficient de proportionnalité près.

Preuve :
$A' = P^{-1}AP$, donc

$$\operatorname{tr} A' = \operatorname{tr} P^{-1}AP = \operatorname{tr} APP^{-1} = \operatorname{tr} AI_n = \operatorname{tr} A$$

et ainsi A et A' ont la même trace. ★

Attention, la réciproque est fausse en générale.

Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La réponse est non : elles n'ont pas la même trace.

Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les deux matrices ont la même trace. Pourtant elles ne sont pas semblables : si elles l'étaient, elles auraient le même déterminant, ce qui n'est pas le cas.

On peut alors donner la définition suivante :

DÉFINITION **16.** *On appelle* trace d'un endomorphisme *en dimension finie la trace de n'importe qu'elle matrice représentant l'endomorphisme.*

En effet, soit $u \in \mathcal{L}(E)$, A et A' des matrices représentant u mais dans des bases différentes, alors comme A et A' sont semblables (formule du changement de bases), elles ont la même trace.

D Quelques exemples

- Par exemple la trace de l'endomorphisme nul est 0 ;
- la trace de l'identité en dimension n est n ;

- Si $E = F \oplus G$, s la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G, π la projection vectorielle sur F parallèlement à G, $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de G, alors $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et on a :

$$\mathcal{M}(s; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} -I_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}(p; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & 0_{n-p} \end{pmatrix}$$

Alors $\operatorname{tr} \pi = p = \operatorname{rg} p$ et $\operatorname{tr} s = p - (n-p) = 2p - n$.

PROPOSITION **26.** *La* trace d'un projecteur *en dimension finie est égale à son rang.*

VI Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

A Définition

Définition 17. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, avec $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, on pose le polynôme de l'endomorphisme u*

$$P(u) = \sum_{i=0}^{d} a_i u^i = a_0 id_E + a_1 u + \cdots + a_d u^d$$

(bien faire attention que $u^0 = id_E$).

Par exemple, si $P = X - 2$, $P(u) = u - 2\mathrm{id}_E$ et si $Q = X^2 + 3X + 4$, $Q(u) = u^2 + 3u + 4\mathrm{id}_E$.
On définit de la même façon un *polynôme de matrice* :

Définition 18. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, avec $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, on pose*

$$P(u) = \sum_{i=0}^{d} a_i A^i = a_0 id_E + a_1 A + \cdots + a_d A^d$$

(bien faire attention que $A^0 = I_n$).

Par exemple, si $P = X - 7$, $P(A) = A - 7I_n$ et si $Q = X^3 - X + 1$, $Q(A) = A^n - A + I_n$.

Proposition 27. *Si $u \in \mathcal{L}(E)$, P, Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, alors*

$$P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) = Q(u) \circ P(u)$$

Preuve :
On peut déjà remarque que la seconde égalité se déduit de la première puisque $PQ = QP$ (valide lorsque le corps $\mathbb{K}$ est commutatif, ce qui est le cas pour $\mathbb{K}$ le corps des réels ou le corps des complexes).
Nous avons par définition d'une combinaison linéaire de fonctions

$$P(u) \circ Q(u) = \left(\sum_{i=0}^{p} a_i u^i\right) \circ \left(\sum_{j=0}^{q} b_j u^j\right) = \sum_{i=0}^{p} a_i u^i \left(\sum_{j=0}^{q} b_j u^j\right)$$

Ensuite, nous utilisons la linéarité de chaque u^i

$$P(u) \circ Q(u) = \sum_{i=0}^{p} a_i \sum_{j=0}^{q} b_j u^i(u^j) = \sum_{i=0}^{p} a_i \sum_{j=0}^{q} b_j u^i \circ u^j \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} a_i b_j u^{i+j}$$

d'où

$$P(u) \circ Q(u) = \left(\sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} a_i b_j X^{i+j}\right)(u) = (PQ)(u)$$

★

B Polynôme annulateur

Définition 19. *On dit qu'un polynôme P est annulateur d'une matrice A si $P(A) = 0$.*
On dit qu'un polynôme P est annulateur d'un endomorphisme u si si $P(u) = 0$.

Proposition 28. *L'ensemble des polynômes annulateurs d'une matrice A est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.*

Preuve :
On vérifie qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Notons $\mathcal{P}_A$ cet ensemble.
– $\mathcal{P}_A \subset \mathbb{K}[X]$ bien sûr.
– le polynôme nul est un polynôme annulateur de A.
– soient P et Q deux polynômes annulateurs de A et λ et μ deux scalaires, on a

$$(\lambda P + \mu Q)(A) = \lambda P(A) + \mu Q(A) = 0$$

et ainsi toute combinaison linéaire de polynômes annulateurs est un polynôme annulateur.
Ainsi $\mathcal{P}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. ★

Proposition 29. *Toute matrice admet un polynôme annulateur non nul.*
Tout endomorphisme en dimension finie admet un polynôme annulateur non nul.

Preuve :
En effet, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2, ainsi la famille

$$(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$$

qui est de cardinal n^2+1 est forcément liée, et donc il existe $(a_0, \dots, a_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ de sorte que

$$\sum_{i=0}^{n^2+1} a_i A^i = 0$$

et donc $P(A) = 0$ avec P le polynôme non nul défini par

$$P = \sum_{i=0}^{n^2+1} a_i X^i$$

Le polynôme obtenu ici est de degré n^2+1, ce qui est très exagéré par rapport à ce que l'on verra plus tard avec le polynôme caractéristique, annulateur aussi mais de degré seulement n.
On peut aussi établir l'existence d'un polynôme unitaire dont le degré est minimal, polynôme que l'on nomme polynôme minimal (hors programme). ★

C Existence d'un polynôme annulateur non nul

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la famille

$$(I_n, A, \dots, A^{n^2})$$

est de cardinal n^2+1, dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n^2. Ainsi, cette famille est liée, il existe donc $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n^2}$ non nul de sorte que

$$\sum_{i=0}^{n^2} a_i A^i = 0$$

et ainsi le polynôme $P = \sum_{i=0}^{n^2} a_i X^i$ non nul est un polynôme annulateur de A.
Ce qui suit est hors programme de PC : la notion de *polynôme minimal*, mais c'est tout de même très proche de la frontière du programme officiel.

PROPOSITION **30.** *Soit $A \in \mathbb{K}_n[X]$. Il existe un unique polynôme π_A unitaire de sorte que l'ensemble des polynômes annulateurs de A soit*

$$\pi_A \mathbb{K}[X]$$

Preuve :
On considère

$$E = \{\deg P\,,\ P \in \mathcal{P}(A) \setminus \{0\}\}$$

qui est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus petit élément d, de sorte que $d = \deg(P)$ avec P annulateur de A. On pose $\pi(A)$ le normalisé de P, qui est donc annulateur, normalisé, de plus petit degré.

D'après les propriétés déjà vues, on a $\pi_A\mathbb{K}[X] \subset \mathcal{P}(A)$.
Réciproquement, si $P \in \mathcal{P}(A)$, on effectue la division euclidienne de P par π_A :

$$P = \pi_A Q + R$$

avec $\deg(R) < \deg(\pi_A)$. Alors

$$R(A) = P(A) - \pi_A(A)Q(A) = 0$$

et ainsi R annule A, de degré strictement inférieur à celui de π_A, ce qui implique que R est nul. ★

DÉFINITION **20.** *Ce polynôme est appelé le polynôme minimal de A.*

D Quelques propriétés

E Polynôme annulateur et inverse d'une matrice

On suppose que P est un polynôme annulateur de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec un coefficient constant non nul, par exemple

$$P(A) = A^5 + 4A^3 - A^2 + A + 2I_n = 0 \qquad P(X) = X^5 + 4X^3 - X^2 + X + 2$$

alors on a

$$A^5 + 4A^3 - A^2 + A = -2I_n$$

et ainsi

$$A \times \left(-\frac{1}{2}A^4 - 2A^2 + \frac{1}{A} + I_n\right) = I_n$$

et ainsi A est inversible (à gauche donc inversible) et son inverse est

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}A^4 - 2A^2 + \frac{1}{A} + I_n$$

F Polynôme annulateur et puissances de matrice

On présente ici deux situations, que l'on peut aisément généraliser :

• On suppose que $P = X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $p \in \mathbb{N}$, on effectue de façon théorique la division euclidienne de X^p par $P = X^2 - 3X + 2$:

$$X^p = (X^2 - 3X + 2)Q + R$$

avec Q et R des polynômes et la condition sur le reste $\deg(R) < 2$. Alors par substitution de X par A, on a

$$A^p = P(A)Q(A) + R(A) = R(A)$$

Or on peut écrire $R = aX + b$, sachant que

$$X^p = (X-1)(X-2)Q(X) + aX + b$$

en substituant 1 et 2 à X, on a le système

$$\begin{cases} 1^p &= a + b \\ 2^p &= 2a + b \end{cases}$$

ce qui permet de déterminer a et b,

$$a = 2^p - 1 \qquad b = 2 - 2^p$$

et ainsi

$$A^p = R(A) = (2^p - 1)A + (2 - 2^p)I_n$$

(que l'on peut vérifier pour $p = 0$ et $p = 1$).

Comme ici la matrice A est forcément inversible (voir paragraphe précédent), on peut aussi déterminer les puissances négatives de A. On peut immaginer que la formule vraie pour $p \geqslant 0$ doit encore être vraie si $p \leqslant 0$.

– On vérifie : si $p \leqslant 0$, $-p \geqslant 0$ et donc

$$A^{-p} = (2^{-p} - 1)A + (2 - 2^{-p})I_n$$

et on a $[(2^p - 1)A + (2 - 2^p)I_n] \times [(2^{-p} - 1)A + (2 - 2^{-p})I_n]$ qui est égal à

$$\begin{aligned}
&(1 - 2^{-p} - 2^p + 1)A^2 + (2 - 2^p)(2^{-p} - 1) + (2^p - 1)(2 - 2^{-p})A + (2 - 2^p)(2 - 2^{-p})I_n \\
&= (2 - 2^{-p} - 2^p)(3A - 2I_n) + ((2 - 2^p)(2^{-p} - 1) + (2^p - 1)(2 - 2^{-p}))A + (2 - 2^p)(2 - 2^{-p})I_n \\
&= \left(6 - 3.2^{-p} - 3.2^p + 2.2^{-p} - 1 - 2 + 2^p + 2.2^p - 2 - 1 + 2^{-p}\right) A \\
&+ (-4 + 2.2^{-p} + 2.2^p + 4 - 2.2^p - 2.2^p + 1)I_n \\
&= I_n
\end{aligned}$$

d'où le résultat, avec un calcul un peu lourd.

– On peut procéder par réccurence descendante (dans les entiers négatifs) . Cela est vrai au rang 0, et si cela est vrai au rang p, alors sachant que $A(A - 3I_n) = -2I_n$, avec la méthode précédente, $A^{-1} = \frac{3}{2}I_n - \frac{1}{2}A$, et

$$\begin{aligned}
A^{p-1} &= A^{-1} \times A^p \\
&= \left(\frac{3}{2}I_n - \frac{1}{2}A\right)((2^p - 1)A + (2 - 2^p)I_n) \\
&= -\frac{1}{2}(2^p - 1)A^2 + \left[\frac{3}{2}(2^p - 1) - \frac{1}{2}(2 - 2^p)\right] A + \frac{3}{2}(2 - 2^p)I_n \\
&= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =
\end{aligned}$$

avec un calcul qui n'est pas forcément bien plus léger.
– Autre méthode : comme $A^2 - 3A + 2I_n = 0$, en multipliant par A^{-2}, on a

$$I_n - 3A^{-1} + 2(A^{-1})^2 = 0$$

et ainsi $P = 2X^2 - 3X + 1$ annule A^{-1} et on peut appliquer la méthode. On a

$$P = 2(X-1)(X-1/2)$$

avec le reste

$$R = aX + b$$

avec les conditions

$$\begin{cases} 1^p &= a + b \\ 2^{-p} &= \frac{a}{2} + b \end{cases}$$

soit

$$a = 2(1 - 2^{-p}) \qquad b = -1 + 2.2^{-p}$$

et ainsi

$$A^{-p} = (A^{-1})^p = R(A^{-1}) = 2(1 - 2^{-p})A^{-1} + (2.2^{-p} - 1)I_n$$

et en remplaçant A^{-1} en fonction de A,

$$A^{-p} = 2(1 - 2^{-p}) \left(\frac{3}{2} I_n - \frac{1}{2} \right) A + (2.2^{-p} - 1)I_n$$

soit encore

$$A^{-p} = (2^{-p} - 1)A + (2 - 2^{-p})I_n$$

• Si le polynôme annulateur admet une racine double, nous avons une seule condition pour déterminer R. Comment fait-on alors ? Par exemple, si $P = (X - 1)^2 = X^2 - 2X + 1$ annule A,

$$X^p = (X - 1)^2 Q(X) + aX + b$$

on a la condition

$$1 = a + b$$

Il nous faudrait une seconde condition. La solution ? On dérive :

$$pX^{p-1} = 2(X - 1)Q + (X - 1)^2 Q'(X) + a$$

et on substitue 1 (la racine double) à X, soit

$$p = a$$

Ainsi dans ce cas, on a

$$A^p = R(A) = pA + (1 - p)I_n$$

G Polynôme annulateur et valeur propre

Définition 21. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur x non nul de E tel que $u(x) = \lambda x$ (u tranforme le vecteur x en un vecteur proportionnel à x avec un facteur de proportionnalité λ)*

On considère $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit λ une valeur propre de u, nous avons l'existence d'un vecteur x non nul de E de sorte que $u(x) = \lambda x$. On a alors

$$P(u)(x) = P(\lambda)x$$

Si P est un polynôme annulateur d'un endomorphisme u, alors on aura

$$P(\lambda)x = 0$$

et ainsi comme x est non nul, $P(\lambda) = 0$ et donc λ sera une racine de P.

Proposition 31. *Si P est un polynôme annulateur d'un endomorphisme u, alors les valeurs propres de u sont* **des** *racines de P.*

Attention, les racines de P ne sont pas forcément des valeurs propres. Par exemple, $P = X(X - 1)$ est un polynôme annulateur de la matrice nulle N puisque $P(N) = N(N - I_n) = 0$. Mais 1 est racine de P n'est pas valeur propre de N. Ici, P n'est pas « optimisé ». Avec $Q = X$, nous obtenons aussi $Q(N) = N = 0$; Q est optimisé dans le sens où nous ne pouvons pas trouver un polynôme annulateur de degré strictement inférieur. On parle de polynôme minimal (polynôme annulateur dont le degré est minimum). Cette notion de polynôme minimal n'est cependant pas au programme.

VII Interpolation de Lagrange

A La problématique

On se donne $a_0, \dots, a_n$ $n+1$ éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $b_0, \dots, b_n$ quelconques de K. On cherche tous les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \ P(a_i) = b_i$$

c'est à dire les polynômes qui permettent d'interpoler le points $(a_0, b_0), \dots, (a_n, b_n)$, vocable que l'on peut visualiser dans le cas réel : par exemple, avec $n = 3$, $(a_0, a_1, a_2) = (0, 1, 3)$ et $(b_0, b_1, b_2) = (2, 0, 1)$:
On définit l'application $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ par

$$\varphi(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n)) = (P(a_i))_{0 \leqslant i \leqslant n}$$

On note aussi $B = (b_0, \dots, b_n)$. On cherche donc les solutions P de $\mathbb{K}[X]$ de l'équation

$$\varphi(P) = B$$

On vérifie que φ est linéaire : si $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(a_i))_{0 \leqslant i \leqslant n} \\ &= (\lambda P(a_i) + \mu Q(a_i))_{0 \leqslant i \leqslant n} \\ &= \lambda (P(a_i))_{0 \leqslant i \leqslant n} + \mu((Q(a_i))_{0 \leqslant i \leqslant n} \\ &= \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q)\end{aligned}$$

B L'isomorphisme

On considère l'application θ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans $\mathbb{K}^{n+1}$ défini par

$$\theta(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n)) = (P(a_i))_{0 \leqslant i \leqslant n}$$

c'est à dire la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]$, qui est donc encore une application linéaire.

PROPOSITION 32. *L'application θ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Preuve :
Nous avons déjà la même dimension pour les espaces de départ et d'arrivé puisque

$$\dim \mathbb{K}_n[X] = \dim \mathbb{K}^{n+1} = n + 1$$

On vérifie alors uniquement que θ est injective : soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\theta(P) = 0$, alors

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \ P(a_i) = 0$$

et ainsi P admet au moins $n+1$ racines $a_0, \dots, a_n$ et donc comme P est degré inférieur à n, on a $P = 0$.
Donc θ est injective et finalement, par les dimensions égales des espaces de départ et d'arrivé, θ est bien un isomorphisme d'espace vectoriels. ★

COROLLAIRE 3. *Il existe une unique solution d'interpolation de degré inférieur à n.*

DÉFINITION 22. *L'unique polynôme d'interpolation de degré inférieur à n est appelé le* polynôme d'interpolation de Lagrange. *On pourra le noter P_L.*

On peut alors en déduire toutes les autres solutions, conformément à la résolution générale de $u(x) = b$ où u est une application linéaire. On rappelle que si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, et $b \in \text{Im}(u)$, alors si on note x_0 une solution (particulière)

$$u(x) = b = u(x_0) \iff u(x - x_0) = 0 \iff x - x_0 \in \text{Ker}(u) \iff x \in x_0 + \text{Ker}(u)$$

Ici, refaisons la résolution : on a si $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$\begin{aligned}
\varphi(P) = B &\iff \varphi(P) = \varphi(P_L) \\
&\iff \varphi(P - P_L) = 0 \\
&\iff \forall i \in [\![0, n]\!]\,,\ (P - P_L)(a_i) = 0 \\
&\iff \prod_{i=0}^{n}(X - a_i) | P - P_L \\
&\iff \exists Q \in \mathbb{K}[X]\,,\ P - P_L = Q\prod_{i=0}^{n}(X - a_i) \\
&\iff \exists Q \in \mathbb{K}[X]\,,\ P = P_L + Q\prod_{i=0}^{n}(X - a_i)
\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des polynômes interpolateur est l'ensemble

$$\left\{ P_L + Q\prod_{i=0}^{n}(X - a_i)\,,\ Q \in \mathbb{K}[X] \right\}$$

noté aussi de façon réduite $P_L + \prod_{i=0}^{n}(X - a_i)\mathbb{K}[X]$.

Corollaire 4. *Ainsi P_L est le polynôme interpolateur de plus petit degré (les autres sont tous de degré supérieur à $n + 1$).*

Nous allons maintenant déterminer le polynôme P_L.

C Les polynômes élémentaires d'interpolation

On peut en fait résoudre assez facilement les cas particuliers où $B = e_j$, $j \in [\![0, n]\!]$. En effet, nous cherchons alors un polynôme P de degré inférieur à n de sorte que pour tout i de $[\![0, n]\!]$, $P(a_i) = \delta_{i,j}$. Nous voulons pour $i \neq j$, a_i racine et $P(a_j) = 1$. Nous obtenons alors

$$L_i = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(X - a_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(a_i - a_j}$$

Proposition 33. *Pour tout i de $[\![0, n]\!]$, on a $L_i = \theta^{-1}(e_i)$ avec la notation inhabituelle $(e_0, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.*

Proposition 34. *La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ des polynômes élémentaires d'interpolation de Lagrange est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée de polynômes qui sont tous de même degré n.*

Preuve :
La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est la famille image par θ^{-1} isomorphisme de la base canonique $(e_0, \ldots, e_n)$ et ainsi c'est bien une base de $\mathbb{K}_n[X]$. ★

On peut donc écrire

$$P_L = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i$$

et ainsi déterminer les coefficients α_i sachant que

$$\forall j \in [\![0, n]\!],\ P_L(a_j) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(a_j) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \delta_{i,j} = \alpha_j$$

Ainsi on a finalement l'expression finalisé du polynôme d'interpolation de Lagrange :

$$P_L = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i = \sum_{i=0}^{n} b_i \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} (X - a_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (a_i - a_j)}$$

Proposition 35. *On a*

$$\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$$

Preuve :
En effet, on a par linéarité

$$\theta\left(\sum_{i=0}^{n} L_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \theta(L_i) = \sum_{i=0}^{n} e_i = (1, \ldots, 1) = \theta(1)$$

et ainsi comme θ est injective, on en déduit le résultat. ★

D Exemple

On suppose dans cet exemple que $n = 3$, $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 1, 2, 3)$ et $(b_0, b_1, b_2, b_3) = (1, -1, 2, 1)$.
Ainsi nous avons les 4 polynômes élémentaires

$$L_0 = \frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \qquad L_1 = \frac{X(X-2)(X-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}$$

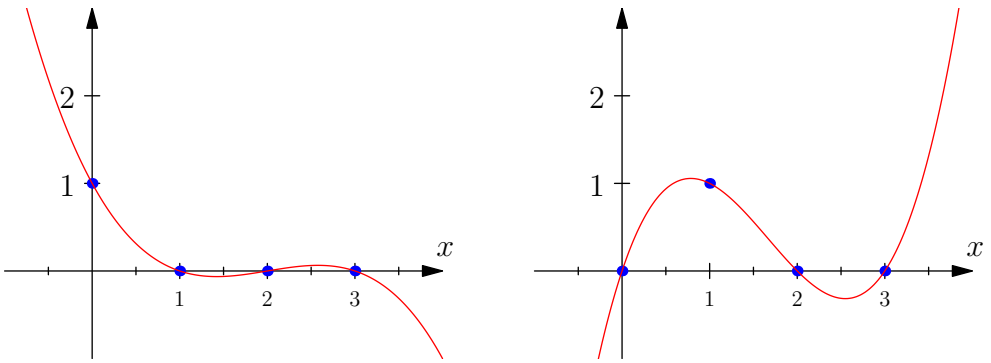
$$L_2 = \frac{X(X-1)(X-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \qquad L_3 = \frac{X(X-1)(X-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$

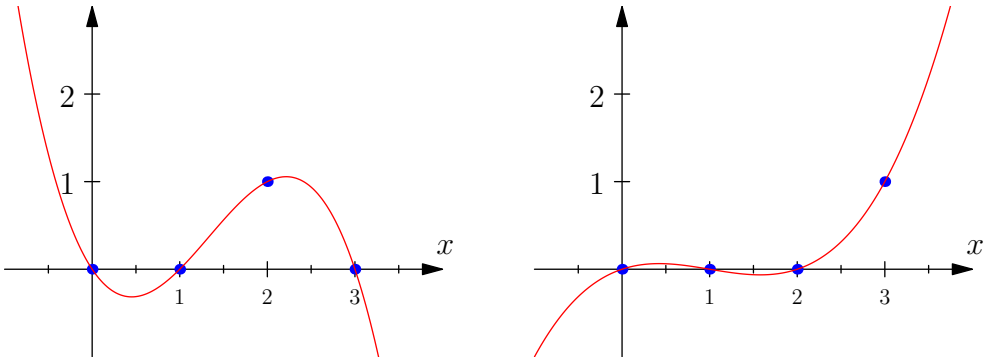
soit encore

$$L_0 = -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3) \qquad L_1 = \frac{1}{2}X(X-2)(X-3)$$

$$L_2 = -\frac{1}{2}X(X-1)(X-3) \qquad L_3 = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2)$$

que l'on peut représenter :

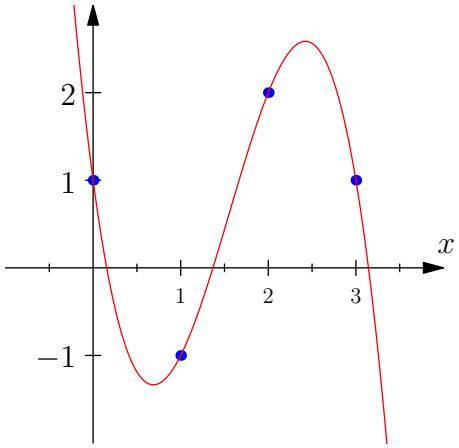




et $P_L = 1.L_0 + (-1)L_1 + 2L_2 + 1.L_3$ soit

$$\begin{aligned}
P_L &= -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3) - \frac{1}{2}X(X-2)(X-3) - \frac{1}{2}X(X-1)(X-3) + \frac{1}{6}X(X-1)(X-2) \\
&= -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3-X) - \frac{1}{2}X(X-3)(2X-3) \\
&= \frac{1}{2}(X-1)(X-2) - \frac{1}{2}(X^2-3X)(2X-3) \\
&= \frac{1}{2}(X^2-3X+2-2X^3+6X^2+3X^2-9X) \\
&= \frac{1}{2}(-2X^3+10X^2-12X+2)
\end{aligned}$$

que l'on représente :



VIII Exercices

A Sommes de sous-espaces vectoriels

1. Soit $E = \mathbb{K}_3[X]$,

$$F = \{P \in E / P(0) = P(1) = P(2) = 0\} \qquad G = \{P \in E / P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$$

et $H = \{P \in E / P(X) = P(-X)\}$.
1) Montrer que $F + G$ est directe et que $F \oplus G = \{P \in E / P(1) = P(2) = 0\}$.
2) Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

2. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel avec $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$, G un sous espace vectoriel. On pose pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$, $G_i = G \cap F_i$.
1) Montrer que $G_1 + \cdots + G_n$ est directe.
2) Comparer G et $G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$.

3. Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F + G + H$ est directe si et seulement si

$$F \cap G = \{0\} \qquad \text{et} \qquad (F + G) \cap H = \{0\}$$

Généraliser.

4. On suppose que $E = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$ et on considère pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$, $u_i \in \mathcal{L}(E_i)$.
1) Montrer qu'il existe un unique $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout i, $u_{/E_i} = u_i$.
2) Montrer que

$$\operatorname{Ker} u = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} u_i \qquad \operatorname{Im} u = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} u_i$$

B Calculs de déterminants

5. Calculer (sous forme factorisée) le déterminant

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

6. Déterminer, suivant les valeurs du paramètre réel a, l'existence et le nombre de solutions réelles de l'équation

$$\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{2x^2} & \mathrm{e}^{-a} & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-a} & \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{-x^2} \\ \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{-x^2} & \mathrm{e}^{2a} \end{vmatrix} = 0$$

où x est l'inconnue.

7. On pose

$$D(x) = \begin{vmatrix} \cos(x-a) & \sin(x-a) & 1 \\ \cos(x-b) & \sin(x-b) & 1 \\ \cos(x-c) & \sin(x-c) & 1 \end{vmatrix}$$

Calculer $D(x)$. Que remarque-t-on ?

8. Calculer le déterminant de la matrice $A_n = \left(|i-j|\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

9. Calculer le déterminant de la matrice $A_n = \left(i+j\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

10. Calculer le déterminant de la matrice $A_n = \left(\max(i,j)\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

11. (CCP) Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée de taille n. Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_{1,1}+x & a_{1,2}+x & \cdots & a_{1,n}+x \\ a_{2,1}+x & a_{2,2}+x & \cdots & a_{2,n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+x & a_{n,2}+x & \cdots & a_{n,n}+x \end{vmatrix}$$

est une fonction affine.

12. Soit A une matrice carrée d'ordre n, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de la matrice en blocs

$$M = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$$

On distinguera les cas $a = 0$ et $a \neq 0$ par exemple.

13. Calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \cdots & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \cdots & \cdots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

14. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

15. Déterminer

$$D(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$$

On distinguera les cas $b = c$ et $b \neq c$; on montrera que $x \mapsto D(a+x, b+x, c+x)$ est une fonction affine.

C Déterminants récurrents d'ordre 2

16. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & & (0) \\ 2 & 5 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 3 \\ (0) & & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

17. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 3 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

18. Calculer
$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & & (0) \\ -x & 1+x^2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -x \\ (0) & & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

19. Calculer
$$D_n = \begin{vmatrix} \cos a & 1 & & (0) \\ 1 & 2\cos a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos a \end{vmatrix}$$

D Déterminants et matrices en blocs

20. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que D est inversible et que C et D commutent. Montrer que
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$

21. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que D est inversible. Montrer que
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BD^{-1}CD)$$

22. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec A inversible et $AC = CA$. Montrer que
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

23. Soit $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B).\det(A-B)$$
puis que
$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geqslant 0$$

24. (CCP PC - 2004) Soient $r_1, \ldots, r_n, a, b$ des complexes avec $a \neq b$. Montrer que
$$P(x) = \begin{vmatrix} r_1+x & b+x & \cdots & b+x \\ a+x & r_2+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ a+x & \cdots & a+x & r_n+x \end{vmatrix}$$
est un polynôme de degré au plus égal à 1. Calculer
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} r_1 & b & \cdots & b \\ a & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & r_n \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & b & \cdots & b \\ a & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}$$

E Déterminants de Vandermonde

25. (Vandermonde lacunaire) Calculer $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$ (on pourra utiliser le polynôme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + X^4$).
26. (Vandermonde lacunaire) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^{n-1} & a_0^{n+1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & a_1^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & a_n^{n+1} \end{vmatrix}$$

F Trace

27. Soit A une matrice triangulaire supérieure avec $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Calculer $\operatorname{tr} A^k$.
28. (Somme de projecteurs) Soient $p_1, \dots, p_n$ des projecteurs de E avec

$$p_1 + \cdots + p_n = \mathrm{id}_E$$

1) Montrer que pour tout i, $\operatorname{tr}(p_i) = \operatorname{rg}(p_i)$.
2) Montrer que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im}(p_i)$$

G Polynôme annulateur

29. On suppose que $X^3 + 2X^2 - X + 1$ annule A. Montrer que A est inversible, déterminer A^{-1} et un polynôme annulateur de A^{-1}.
30. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que $P = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$ annule la matrice A. Est-ce vrai en taille 3 ?
31. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.
On suppose connus deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ annulateurs de A et B respectivement.
Exprimer en fonction de P et Q un polynôme annulateur de M.
32. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer un polynôme annulateur de A.

H Polynômes de Lagrange

33. On considère le problème d'interpolation $(-2, 0, 1, 2)$ par $(4, 0, 0, 4)$. Choisir la solution de Lagrange parmi

$$P = X^4 - \frac{2}{3}X^3 - 3X^2 + \frac{8}{3}X \qquad Q = \frac{4}{3}X^2 - \frac{4}{3} \quad R = \frac{1}{3}X^3 + X^2 - \frac{4}{3}X$$

34. Montrer qu'il existe une infinité de polynômes de degré 2 dont le graphe passe par les points $(0, 0)$ et $(1, 0)$.
35. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme de degré 2 passant par les points $(0, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 15)$ et $(3, 40)$.
36. Déterminer le polynôme interpolateur de Lagrange de $(-1, 0, 1)$ par $(1, 0, 1)$.
37. Déterminer le polynôme interpolateur de Lagrange de $(-2, -1, 0, 1)$ par $(0, -2, -4, 0)$.

I Autres

38. 1) Soit s une symétrie d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie E. Montrer que

$$\det(s) = (-1)^{\dim \operatorname{Ker}(s+\mathrm{id}_E)}$$

2) On considère l'endomorphisme (à justifier) θ défini par

$$\begin{array}{rcl} \theta : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M^T \end{array}$$

Calculer $\det \theta$.

39. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E. On pose

$$\forall k \in \{1, \ldots, n-1\}\,,\ f_k = e_k + e_{k+1} \quad f_n = e_n + e_1$$

$(f_1, \ldots, f_n)$ est-elle une base de E ?

40. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n > 0$, $b_1, \ldots, b_{n-1} > 0$, $c_1, \ldots, c_{n-1} < 0$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} > 0$$

IX Exercices concours

41. (TPE PC 2005) Calculer le déterminant

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} \operatorname{ch}^2 x & \operatorname{sh} x & 0 & \cdots & 0 \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch}^2 x & \operatorname{sh} x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \operatorname{sh} x \\ 0 & \cdots & 0 & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch}^2 x \end{vmatrix}$$

42. (Centrale PC-1999) La matrice

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2x & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

est-elle inversible ?

43. (ICNA MP - 1999) Factoriser le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos(3a) \\ 1 & \cos b & \cos(3b) \\ 1 & \cos c & \cos(3c) \end{vmatrix}$$

44. (CCP 1996) À l'aide du polynôme

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = V(a_1, \ldots, a_n)$$

(une autre méthodologie pour le calcul du déterminant de Vandermonde)

45. (Centrale PSI-2004) On note

$$A_n = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & k & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

1) Déterminer $\det(A_{n+2})$ en fonction de $\det(A_{n+1})$ et de $\det(A_n)$.
2) Montrer que si $|k| \geqslant 2$, $A_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

46. (CCP PSI 2013 - extraits) Calculer B^n où $B = \begin{pmatrix} A & 0 & A \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Si P est un polynôme $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$, on pose pour une matrice M

$$P(M) = \sum_{k=0}^{N} a_k M^k$$

Montrer que pour tout polynôme P, on a

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 & AP'(A) \\ 0 & P(A) & 0 \\ 0 & 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

X Exercices corrigés

A Déterminants récurrents d'ordre 2

Exercice 1.

Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & & (0) \\ 2 & 5 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 3 \\ (0) & & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

☞ $D_1 = 5$, $D_2 = 19$ et pour $n \geqslant 3$, on développe selon la première ligne

$$D_n = 5D_{n-1} - 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & & (0) \\ 0 & 5 & 3 & \ddots & \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ (0) & & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n-1}$$

et en développant le second déterminant selon la première colonne

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

Ainsi, la suite $(D_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 de polynôme $P = X^2 - 5X + 6$, dont les racines sont 3 et 2. On pose $D_0 = 1$ de sorte que $D_2 = 5D_1 - 6D_0$. Ainsi on peut écrire

$$D_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$$

avec $D_0 = 1 = \lambda + \mu$ et $D_1 = 5 = 2\lambda + 3\mu = 2(\lambda + \mu) + \mu$. Ainsi $\mu = 3$ et $\lambda = -2$. Donc

$$\boxed{D_n = -2^{n+1} + 3^{n+1}}$$

Exercice 2.

Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 3 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

☞ $D_1 = 2$, $D_2 = 1$ et pour $n \geqslant 3$, on développe selon la première ligne

$$D_n = 2D_{n-1} - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & & (0) \\ 0 & 2 & 1 & \ddots & \\ 0 & 3 & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}_{n-1}$$

et en développant le second déterminant selon la première colonne

$$D_n = 2D_{n-1} - 3D_{n-2}$$

Ainsi, la suite $(D_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 de polynôme $P = X^2 - 2X + 3$.
On définit aussi D_0 de sorte que $D_2 = 2D_1 - 3D_0$ soit $D_0 = 1$.
Les racines de P sont $1 + \pm i\sqrt{2}$, et on peut écrire pour tout entier n,

$$D_n = a(1 + i\sqrt{2})^n + b(1 - i\sqrt{2})^n$$

avec $(a, b) \in \mathbb{C}$, et les conditions initiales

$$D_0 = 1 = a + b \qquad D_1 = 2 = a(1 + i\sqrt{2}) + b(1 - i\sqrt{2})$$

et ainsi

$$(a - b)i\sqrt{2} = 1 \qquad a - b = \frac{1}{i\sqrt{2}}$$

et donc

$$2a = 1 + \frac{1}{i\sqrt{2}} = \frac{1 + i\sqrt{2}}{i\sqrt{2}} \qquad 2b = 1 - \frac{1}{i\sqrt{2}} = -\frac{1 - i\sqrt{2}}{i\sqrt{2}}$$

ce qui conduit à

$$D_n = \frac{1}{2i\sqrt{2}}\left[(1 + i\sqrt{2})^{n+1} - (1 - i\sqrt{2})^{n+1}\right]$$

et ainsi sachant que $(z - \overline{z})/(2i)$ est la partie imaginaire de z, on a

$$D_n = \sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n+1} \binom{n}{2p+1} (-1)^p 2^p$$

Par exemple, pour $n = 2$,

$$\sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant 3} \binom{n+1}{2p+1} (-1)^p 2^p = \binom{3}{1} - 2\binom{3}{3} = 3 - 2 = 1 = D_2$$

Exercice 3.

Calculer

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & & (0) \\ -x & 1+x^2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -x \\ (0) & & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

☞ On obtient comme ci-dessus,

$$D_n(x) = (1 + x^2)D_{n-1}(x) - x^2 D_{n-2}(x)$$

Pour $D_1(x) = x^2 + 1$, $D_2(x) = x^4 + x^2 + 1$ et

$$D_3(x) = (1 + x^2)(x^4 + x^2 + 1) + x^2(x^2 + 1) = x^6 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 1$$

On pose $D_0(x) = 1$ de sorte que $D_2 = (1 + x^2)D_1 - x^2 D_0$.

Pour x fixé, $\Delta(x) = (1+x^2)^2 - 4x^2 = (x^2-1)^2$.

• Si $x \notin \{-1, 1\}$, les racines sont 1 et x^2 et

$$D_n(x) = \lambda(x) + \mu(x)x^{2n}$$

avec $D_0(x) = 1 = \lambda(x) + \mu(x)$ et $D_1(x) = 1 + x^2 = \lambda(x) + \mu(x)x^2 = \lambda(x) + (1-\lambda(x))x^2$ d'où $\lambda(x)(1-x^2) = 1 + x^2 - x^2 = 1$ et ainsi

$$\lambda(x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad \mu(x) = 1 - \lambda(x) = \frac{-x^2}{1-x^2}$$

et ainsi

$$D_n(x) = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2} = \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$$

• Si $x \in \{-1, 1\}$, on peut prolonger par continuité la solution pour $x \notin \{-1, 1\}$ et obtenir

$$D_n = n + 1$$

où dire que $\Delta = 0$, la racine est 1, on a $D_n = \lambda + \mu n$ avec $D_0 = \lambda = 1$ et $D_1 = \lambda + \mu = 2$ et ainsi $\lambda = 1$ et $\mu = 1$ d'où $D_n = n + 1$.

$$\boxed{D_n = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} = \begin{cases} \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2} & \text{si } x^2 \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x^2 = 1 \end{cases}}$$

Exercice 4.

Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos a & 1 & & (0) \\ 1 & 2\cos a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos a \end{vmatrix}$$

☞ On a $D_1 = \cos(a)$ et $D_2 = 2\cos^2 a - 1$.
Si $n \geqslant 2$, on développe selon la dernière colonne (pour garder la même forme aux rangs inférieurs) :

$$D_n = 2\cos(a)D_{n-1} - \begin{vmatrix} \cos a & 1 & & & (0) \\ 1 & 2\cos a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2\cos a & 1 \\ (0) & & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

puis

$$D_n = 2\cos(a)D_{n-1} - D_{n-2}$$

et ainsi $D_n - 2\cos a D_{n-1} + D_{n-2} = 0$. Ainsi (D_n) vérifie une relation de récurrence d'ordre 2, de polynôme caractéristique $P = X^2 - 2\cos(a)X + 1$. On peut aussi définir D_0 de sorte que $D_2 = 2\cos(a)D_1 - D_0$ soit $D_0 = 1$.

Les racines de de P sont $\cos(a) \pm i\sin(a) = \mathrm{e}^{\pm ia}$.
• si $a \notin \pi\mathbb{Z}$, on peut écrire (écriture réelle) pour tout entier n,

$$D_n = \alpha\cos(na) + \beta\sin(na)$$

avec α et β des réels. Les conditions initiales donnent

$$\begin{cases} D_0 &= 1 = \alpha \\ D_1 &= \cos a = \alpha\cos a + \beta\sin a \end{cases}$$

et ainsi $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. Donc

$$D_n = \cos(na)$$

• si $a \in \pi\mathbb{Z}$, on a une racine double $\mathrm{e}^{ia} = \cos(a)$ réelle, et on peut écrire (écriture réelle) pour tout entier n,

$$D_n = \alpha\cos^n(a) + \beta n\cos^n(a)$$

avec α et β des réels. Les conditions initiales donnent

$$\begin{cases} D_0 &= 1 = \alpha \\ D_1 &= \cos a = \alpha\cos a + \beta\cos a \end{cases}$$

et ainsi $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. Donc

$$D_n = \cos^n(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a =\in 2\pi\mathbb{Z} \\ (-1)^n & \text{si } a =\in 2\pi\mathbb{Z} + \pi \end{cases} = \cos(na)$$

B Déterminants et matrices en blocs

Exercice 5.

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que D est inversible et que C et D commutent. Montrer que

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$

☞ Comme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ CD - DC & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

on a

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\det D = \det(AD - BC)\det D$$

d'où le résultat en simplifiant par $\det D \neq 0$.

Exercice 6.

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que D est inversible. Montrer que

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BD^{-1}CD)$$

☞ Comme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ -D^{-1}CD & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BD^{-1}CD & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

on a

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\det D = \det(AD - BD^{-1}CD)\det D$$

d'où le résultat en simplifiant par $\det D \neq 0$.

Exercice 7.

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec A inversible et $AC = CA$. Montrer que

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

☞ Comme

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -C & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -CA + CA & -CB + AD \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & AD - CB \end{pmatrix}$$

on a ainsi

$$\det(A)\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(AD - CB)$$

d'où le résultat en simplifiant par $\det(A)$ qui est non nul.

Exercice 8.

Soit $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A + B).\det(A - B)$$

puis que

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geqslant 0$$

☞ On effectue l'opération par blocs $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + B & B \\ B + A & A \end{vmatrix}$$

puis l'opération par blocs $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + B & B \\ B + A & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + B & B \\ 0 & A - B \end{vmatrix}$$

et ainsi finalement

$$\boxed{\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A + B).\det(A - B)}$$

Après de nombreuses tentatives, on n'arrive pas à mettre sous une forme triangulaire, c'est curieux. On insiste en cherchant de façon générale des opérations comme ci-dessus : On effectue l'opération par blocs $C_1 \leftarrow C_1 + \alpha C_2$

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-\alpha B & -B \\ B+\alpha A & A \end{vmatrix}$$

puis l'opération par blocs $L_2 \leftarrow L_2 + \beta L_1$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-\alpha B & -B \\ B+\alpha A & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-\alpha B & -B \\ B+\alpha A+\beta A-\alpha\beta B & A+\beta B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+\alpha B & B \\ (1-\alpha\beta)B+(\alpha+\beta)A & A+\beta B \end{vmatrix}$$

On choisit alors α et β pour annuler $(1-\alpha\beta)B+(\alpha+\beta)A$ avec par exemple $\beta = -\alpha$ et $1+\alpha^2 = 0$ soit $\alpha = i$ par exemple et $\beta = -i$. Alors

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & -B \\ 0 & A-iB \end{vmatrix}$$

et donc

$$\boxed{\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB)}$$

Si A et B sont réelles, en notant $z = \det(A+iB)$, on a $\bar{z} = \det(A-iB)$ et ainsi $\det M = z\bar{z} = |z|^2$ et donc $\det M \geqslant 0$.

C Déterminants de Vandermonde

Exercice 9 (Vandermonde lacunaire).

Calculer $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$ (on pourra utiliser le polynôme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + X^4$).

☞ On a :
$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & P(a) \\ 1 & b & b^2 & P(b) \\ 1 & c & c^2 & P(c) \\ 1 & d & d^2 & P(d) \end{vmatrix}$ en effectuant $C_4 \leftarrow \lambda_0 C_1 + \lambda_1 C_2 + \lambda_2 C_3 + C_4$
Choisissons alors le polynôme P de sorte que $P(a) = P(b) = P(c) = 0$.
On doit avoir $P = (X-a)(X-b)(X-c)Q$ puis $P = (X-a)(X-b)(X-c)(X-\alpha)$ puis en identifiant les coefficients de degré 3 $\alpha = -a-b-c$.
Ainsi on pose $P = (X-a)(X-b)(X-c)(X+a+b+c)$.
Alors $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & 0 \\ 1 & d & d^2 & P(d) \end{vmatrix} = P(d)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = P(d)(c-a)(b-a)(c-b) = (d-a)(d-b)(d-c)((c-a)(c-b)(b-a)(a+b+c+d)$

Exercice 10 (Vandermonde lacunaire).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^{n-1} & a_0^{n+1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & a_1^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & a_n^{n+1} \end{vmatrix}$$

☞ On généralise la méthode de l'exercice précédent. On pose

$$P = \lambda_0 + \lambda_1 X \cdots + \lambda_{n-1} X^{n-1} + X^{n+1}$$

et on effectue l' opération $C_{n+1} \leftarrow \lambda_0 C_1 + \cdots + \lambda_{n-1} C_n + C_{n+1}$ et ainsi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^{n-1} & P(a_0) \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & P(a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & P(a_n) \end{vmatrix}$$

On choisit alors P avec $P(a_0) = \cdots = P(a_{n-1}) = 0$ c'est à dire

$$P = (X - a_0) \cdots (X - a_{n-1})(X - \alpha)$$

avec la somme des racines nulle (opposé du coefficient de X^n) soit

$$\alpha = -a_0 - \cdots - a_{n-1}$$

Alors

$$D = V(a_0, \dots, a_{n-1}) P(a_n) = V(a_0, \dots, a_n)(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$$

D Trace

E Polynôme annulateur

Exercice 11.

On suppose que $X^3 + 2X^2 - X + 1$ annule A. Montrer que A est inversible, déterminer A^{-1} et un polynôme annulateur de A^{-1}.

☞ Comme $A^3 + 2A^2 - A + I_n = 0$, on a $A(-A^2 - 2A + I_n) = I_n$ et ainsi A inversible à droite, donc inversible avec $A^{-1} = -A^2 - 2A + I_n$.

En multipliant par A^{-3}, on obtient

$$I_n + 2A^{-1} - A^{-2} + A^{-3} = 0$$

et ainsi $Q = 1 + 2X - X^2 + X^3$ annule A^{-1}.

Exercice 12.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que $P = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$ annule la matrice A. Est-ce vrai en taille 3 ?

☞ On a $\det(A) = ad - cb$ et $\text{tr}(A) = a + d$, et ainsi

$$P(A) = A^2 - (a+d)A + (ad - cb)I_2$$

soit

$$P(A) = \begin{pmatrix} a^2 + bc - (a+d)a + (ad-cb) & ab + bd - (a+d)b \\ ca + db - (a+d)b & cb + d^2 - (a+d)d + (ad-cb) \end{pmatrix} = 0$$

En taille 3, cela est faux avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que $\det(A) = 0$ et $\text{tr}(A) = 0$. Ainsi

$$P(A) = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est non nulle.

Exercice 13.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.
On suppose connus deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ annulateurs de A et B respectivement.
Exprimer en fonction de P et Q un polynôme annulateur de M.

☞ Nous avons

$$M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & AC + CB \\ 0 & B^2 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} A^3 & A^2C + ACB + CB^2 \\ 0 & B^3 \end{pmatrix}$$

et donc de façon générale

$$M^p = \begin{pmatrix} A^p & (*)_p \\ 0 & B^p \end{pmatrix}$$

le terme $(*)_p$ n'étant pas clair du tout ici.

Si on utilise P et Q , on a par combinaison linéaire des puissances de M

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & * \\ 0 & P(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & P(B) \end{pmatrix} \qquad Q(M) = \begin{pmatrix} Q(A) & *' \\ 0 & Q(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(A) & *' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit alors de penser à

$$(PQ)(M) = P(M)Q(M) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & P(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q(A) & *' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et ainsi PQ annule la matrice M.

Exercice 14.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer un polynôme annulateur de A.

☞ On cherche un polynôme annulateur de degré 1, $P = X + a$ (renormalisé car si P annule A, αP aussi), on a

$$P(A) = A + aI_2 = \begin{pmatrix} 1+a & 1 \\ 0 & 1+a \end{pmatrix} \neq 0$$

et ainsi il n'y a pas de polynôme de degré 1 qui annule A.

On cherche alors un polynôme annulateur de degré 2, $P = X^2 + aX + b$, on a

$$P(A) = A^2 + aA + bI_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a+b & 2+a \\ 0 & 1+a+b \end{pmatrix}$$

On choisit alors $a = -2$ et $b = 1$, $P = X^2 - 2X + 1$ annule A.