Devoir en temps libre °3

Exercice I

Pour $x > 0$, on pose pour tout entier naturel n

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$$

et on considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$.

1. Montrer que la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. On note f sa somme.
2. Montrer que la convergence de la série de fonction est en fait uniforme sur tout $[a,+\infty[$ avec $a > 0$. Que peut-on en déduire ? (On énoncera avec soin le théorème utilisé).
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$. On donnera deux preuves.
4. La convergence est-elle uniforme sur $]0,+\infty[$?
5. La convergence est-elle normale sur $]0,+\infty[$? sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$?
6. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $f'(x)$ pour $x > 0$. Déterminer les variations de f.
7. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $f^{(p)}(x)$ pour $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}$.
8. Montrer que f est convexe.
9. Montrer que si $x > 0$, on a
$$f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x} \qquad (E)$$
En déduire un équivalent de f en 0^+.
10. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$ (on pourra utiliser (E) ainsi que la monotonie de f).
11. Montrer que $f(x) - \frac{1}{x}$ admet une limite ℓ en 0^+ que l'on exprimera à l'aide d'une somme d'une série numérique.
12. Détermination de ℓ.
    (a) Pour tout entier n, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{d}t$.
    (b) Montrer que
    $$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t$$
    (c) En déduire que
    $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$
    et en déduire la valeur de ℓ.
13. Représenter la courbe de la fonction f.

Exercice II

Soit $r \in]0,1[$ fixé.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction p_n par $\forall t \in \mathbb{R}, \quad p_n(t) = r^n \cos(nt)$.
   (a) Montrer la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions de terme général p_n.
   (b) Pour tout réel t, on pose alors $P(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)$.

   En remarquant que $2\cos(nt) = \mathrm{e}^{-int} + \mathrm{e}^{int}$, justifier l'égalité

   $$P(t) = \frac{1-r^2}{r^2 - 2r\cos(t) + 1}$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.
   (a) Justifier que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On définit alors $g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t)\mathrm{d}t$.

   On note aussi $g_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = c_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t \quad g_n(x) = r^n\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$$

   Justifier alors l'égalité : $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.
   (c) Montrer que la fonction g ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: pour cela, on précisera l'usage du théorème du cours concernant la classe $\mathcal{C}^1$ d'une fonction somme de série de fonctions.

3. On considère E l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et qui sont 2π-périodiques.
   À toute fonction $f \in E$, on associe $g = \Pi(f)$ définie par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

   (a) En utilisant les questions précédentes, montrer que g est définie, 2π-périodique et continue.
   (b) Justifier que l'application Π ainsi définie est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel E.

Fin



Exercice I

Pour $n \geqslant 0$, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-n\}$. Ainsi la série de fonction peut être considérée sur $]0, +\infty[$.

1. Soit $x > 0$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+x}$ est une série alternée ; on a la suite numérique $\left(\frac{1}{n+x}\right)$ qui converge vers 0, en décroissant. Ainsi d'après le critère spécial des séries alternées, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+x}$ converge.
   Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement, vers une fonction que l'on note f.

2. On a d'après la majoration du critère de Leibniz pour les séries alternées vérifiant le critère spécial, pour tout $x > 0$
$$|R_n(x)| = \left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p+x}\right| \leqslant \frac{1}{n+1+x} \leqslant \frac{1}{n+1}$$
   Ainsi $\| R_n \|_{\infty,]0,+\infty[} \leqslant \frac{1}{n+1}$ et donc $(\| R_n \|_\infty)$ converge vers 0 : $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $]0, +\infty[$.

   Comme il s'agit d'une série de fonction continue, on en déduit que la somme f est aussi une fonction continue.

3. On sait que (série alternée vérifiant le critère spécial)
$$|f(x)| \leqslant |f_0(x)| = \frac{1}{x}$$
   et ainsi f tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

   Autre méthode : nous avons la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$, et pour tout n,
$$f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = \ell_n$$
   Ainsi d'après le théorème de la double limite, on a f qui admet comme limite $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 0$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. On a vu que oui.

5. Pour la convergence normale, le problème de la norme infinie se pose pour f_0 sur $]0, +\infty[$: on a $\| f_0 \|_\infty = +\infty$. La converge normale n'a pas de sens.
   Même si on enlève f_0 de la somme, on a de toute façon (on peut aussi fermer en 0)
$$\| f_n \|_{\infty,]0,+\infty[} = \frac{1}{n}$$
   et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$.

Sur $[a,+\infty[$, comme $|f_n(x)| = \frac{1}{n+x}$, on a

$$\| f_n \|_{\infty,[a,+\infty[} = \frac{1}{n+a}$$

et ainsi comme la série numérique $\sum \frac{1}{n+a}$ diverge, la convergence n'est pas normale.

6. La série $\sum f_n$ est une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, qui converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers une fonction f.
On considère alors la séries des dérivées $\sum f'_n$. On a si $x > 0$

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

et ainsi

$$|f'_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+x)^2} \leqslant \frac{1}{(n+a)^2}$$

pour $x \geqslant a > 0$. Ainsi $\sum \| f'_n \|_{\infty,[a,+\infty[}$ est une série convergente : la série des dérivées converge normalement, donc uniformément sur tout $[a,+\infty[$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a,+\infty[$, $a > 0$ et donc finalement sur $]0,+\infty[$ et que l'on peut dériver terme à terme

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Pour tout $x > 0$, la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ est une série vérifiant le critère spécial des séries alternées, et ainsi la somme est du signe du premier terme, soit $f'(x) < 0$. On en déduit que f est strictement décroissante.

7. Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on a si $x > 0$

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{(k!(-1)^{n+k}}{(n+x)^{k+1}}$$

Pour $k = 0$, la série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément, donc simplement sur $[a,+\infty[$;
Pour $k \geqslant 1$, on a

$$\left|f_n^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{k!}{(n+a)^{k+1}}$$

et ainsi $\sum \| f_n^{(k)} \|_{\infty,[a,+\infty[}$ est convergente : la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ est normalement convergente, donc uniformément sur $[a,+\infty[$.

Ainsi pour tout $p \geqslant 1$, on peut appliquer le théorème de dérivation d'ordre p : les séries $\sum f_n$, $\sum f'_n$, ...,$\sum f_n^{(p-1)}$ convergent simplement sur $[a,+\infty[$ et la série $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$: f est de classe $\mathcal{C}^p$ et on a

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p!(-1)^{n+p}}{(n+x)^{p+1}}$$

formule aussi valide lorsque $p = 0$.

8. Il s'agit d'un simple télescopage : il suffit d'écrire les termes pour l'observer. On a pour $x > 0$,

$$f(x+1) + f(x) = \underbrace{\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \cdots\right]}_{f(x+1)} + \underbrace{\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots\right]}_{f(x)} = \frac{1}{x}$$

et puis voilà. Formellement, on écrit un décalage d'indice dans l'une des sommes

$$\begin{aligned} f(x+1)+f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(1-1)\frac{1}{n+x}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Comme f est continue en 1, $f(x+1)$ tend vers $f(1)$ lorsque x tend vers 0. Ainsi

$$f(x)=\frac{1}{x}-f(x+1)\underset{0}{\sim}\frac{1}{x}$$

puisque $\frac{1}{x}$ tend vers l'infini et $f(x+1)$ tend vers une constante (la fonction f est continue en 1), donc négligeable devant $\frac{1}{x}$.

9. En $+\infty$, on a puisque f décroissante

$$2f(x+1)\leqslant f(x+1)+f(x)\leqslant 2f(x)$$

et ainsi

$$f(x+1)\leqslant\frac{1}{2x}\leqslant f(x)$$

que l'on réécrit pour $x>1$

$$\frac{1}{2x}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2(x-1)}$$

d'où

$$1\leqslant 2xf(x)\leqslant\frac{x}{x-1}$$

et ainsi par encadrement, $2xf(x)$ tend vers 1 en $+\infty$, soit encore

$$f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2x}$$

10. On a

$$f(x)-\frac{1}{x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)=f(x+1)$$

Comme f est continue en 1, on a donc

$$f(x)-\frac{1}{x}\underset{x\to 1}{\longrightarrow}f(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$$

Exercice II

1. (a) Soit $t\in\mathbb{R}$, on a pour tout n

$$|p_n(t)|\leqslant r^n$$

et ainsi $\|\ p_n\ \|_\infty\leqslant r^n$. Or la série numérique $\sum r_n$ est une série géométrique convergente puisque $0<r<1$. Ainsi la série de fonctions $\sum p_n$ est une série normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

(b) Attention, la somme commence à 1 : on a pour tout t réel

$$\begin{aligned} P(t) &= 1+2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n(\mathrm{e}^{int}+\mathrm{e}^{-int} = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(r\mathrm{e}^{it})^n+\sum_{n=1}^{+\infty}(r\mathrm{e}^{-it})^n \\ &= 1+\frac{r\mathrm{e}^{it}}{1-r\mathrm{e}^{it}}+\frac{r\mathrm{e}^{-it}}{1-r\mathrm{e}^{-it}} \\ &= \frac{(1-r\mathrm{e}^{it})(1-r\mathrm{e}^{-it})+r\mathrm{e}^{it}(1-r\mathrm{e}^{-it})+r\mathrm{e}^{-it}(1-r\mathrm{e}^{it})}{(1-r\mathrm{e}^{it})(1-r\mathrm{e}^{-it})} \\ &= \frac{1-2r\cos(t)+r^2+2r\cos(t)-2r^2}{(1-r\mathrm{e}^{it})(1-r\mathrm{e}^{-it})} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2} \end{aligned}$$

2. (a) f étant continue, f est bornée sur le segment $[0,2\pi]$; comme f est 2π périodique, est alors bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(b) Soit x fixé, on considère la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$. On a si $n \geqslant 1$

$$g_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^n}{\pi}[\cos(nt)\cos(nx)+\sin(nt)\sin(nx)]f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{r^n}{\pi}\cos(n(x-t))f(t)\mathrm{d}t$$

On considère alors la série de fonction $\sum h_n$ avec

$$h_n(t) = r^n\cos(n(x-t))f(t)$$

On a alors

$$|h_n(t)| \leqslant r^n \parallel f \parallel_\infty$$

et ainsi $\parallel h_n \parallel_\infty \leqslant \parallel f \parallel_\infty r^n$. Ainsi la série de fonctions $\sum h_n$ converge normalement sur $[-\pi,\pi]$, et donc uniformément. Ainsi puisque les fonctions sont continues, on peut intégrer terme à terme en écrivant (interversion du signe intégral et du signe somme) :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1+2\sum_{n=0}^{+\infty} r^n\cos(n(x-t))f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} r^n[\cos(nt)\cos(nx)+\sin(nt)\sin(nx)]f(t)\mathrm{d}t \\ &= g_0(x)+\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\cos(nx)\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)f(t)\mathrm{d}t+\sin(nx)\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)f(t)\mathrm{d}t \\ &= g_0(x)+\sum_{n=1}^{+\infty} r^n(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) \end{aligned}$$

(c) On considère la série de fonctions $\sum g_n$, série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; elle converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g.
La série des dérivées est $\sum g_n'$ avec si $n \geqslant 1$ $g_n'(x) = nr^n(-a_n\sin(nx)+b_n\cos(nx))$ (et $g_0' = 0$)). or on vérifie que (a_n) et (b_n) sont bornées par B borne de f et ainsi

$$\parallel g_n' \parallel_\infty \leqslant 2Br^n$$

ce qui assure la convergence normale et donc uniforme de la série des dérivées $\sum g_n'$: ainsi on peut appliquer le théorème de dérivation terme à terme : g est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nr^n(-a_n\sin(nx)+b_n\cos(nx))$$

3. On a vu que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et donc elle est continue. pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g(x+2\pi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x+2\pi-t)f(t)\mathrm{d}t$$

or la fonction P est 2π périodique puisque

$$P(t+2\pi) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n(t+2\pi)) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(nt) = P(t)$$

et ainsi

$$g(x+2\pi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x+2\pi-t)f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t)\mathrm{d}t = g(x)$$

Ainsi la fonction g est aussi 2π périodique.

4. Ainsi Π définie une application de E dans E. Vérifions que Π est linéaire. Soit f_1 et f_2 deux fonctions de E, λ et μ deux scalaires, nous avons pour tout x

$$\begin{aligned}
\Pi(\lambda f_1 + \mu f_2)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)(\lambda f_1(t) + \mu f_2(t))\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\lambda P(x-t) f_1(t) + \mu P(x-t) f_2(t)))\mathrm{d}t \\
&= \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t) f_1(t) + \frac{\mu}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t) f_2(t)))\mathrm{d}t \\
&= \lambda\Pi(f_1)(x) + \mu\Pi(f_2)(x) \\
&= (\lambda\Pi(f_1) + \mu\Pi(f_2))(x)
\end{aligned}$$

et ainsi $\Pi(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda\Pi(f_1) + \mu\Pi(f_2)$: Π est linéaire. Donc Π est un endomorphisme de E.

