Quinzaine 5 du 27/11 au 08/12

Chapitre 4 : *Probabilités*

Révisions non exhaustives de première année : Ensemble, appartenance, ensemble vide. Inclusion. Partie ou sous-ensemble. Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, privé de, complémentaire. Produit cartésien fini. Ensemble des parties d'un ensemble.

Application. Graphe. Indicatrices. Restriction et prolongement. Composition.
Image directe et image réciproque. Propriétés pour les images réciproques.
Injection, surjection, bijection. Propriétés usuelles.

Cardinal d'un ensemble fini. Cardinal du complémentaire, de la différence, du produit cartésien.
Cardinal de $\mathcal{F}(E, F)$. Cardinal de $\mathcal{P}(E)$ (*) : preuve par récurrence ou preuve ensembliste.
Nombre d'injections, nombre de p-liste d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n.
Nombre de bijections, de permutations.
Nombre de parties à p éléments ou p-combinaisons d'un ensemble de cardinal n.
Formules sur les coefficients de Newton. Formule du binôme, triangle de Pascal.

La notion de tribu n'appelle aucun autre développement que sa définition.
L'étude de la dénombrabilité d'un ensemble et la construction d'espaces probabilisés sont hors programme.

Dénombrabilité : usage réservé au contexte probabiliste, notion sans évaluation spécifique.
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$ (programme officiel). Ensemble au plus dénombrable (en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$).
Un ensemble dénombrable peut s'écrire en extension sous la forme $\{x_i\,,\, i \in \mathbb{N}\}$ et un ensemble au plus dénombrable peut s'écrire en extension sous la forme $\{x_i\,,\, i \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$ et les x_i distincts.

Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$ (*), de $\mathbb{N}^2$, d'un produit cartésien de deux ou plusieurs ensembles dénombrables.
Toute union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

Familles sommables : méthodes et résultats seront admis, et directement utilisés. Chaque professeur est libre d'en adapter le contenu au niveau de formalisme qu'il juge préférable pour ses étudiants.
Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste (ce qui est à mon sens un mensonge vu le sujet centrale 2023).

En vue de généraliser les sommes finies et les sommes de séries de réels positifs, on admet sans soulever de difficulté qu'on sait associer à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ sa somme $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i \in [0, +\infty]$, et pour tout découpage en paquets $I = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ de I, $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} x_i \right)$.
– La famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ est dite sommable si $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i < +\infty$. En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude

de la somme valant preuve de sommabilité. On peut utiliser croissance, linéarité positive, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes.

– Une famille $(x_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est. Pour $I = \mathbb{N}$, la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée. Si $|x_i| \leqslant y_i$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in I}$ implique celle de $(x_i)_{i\in I}$.
En cas de sommabilité, les sommes se manipulent naturellement grâce aux propriétés suivantes : croissance, linéarité, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes.

Quelques exemples traités :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^n} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty}(\zeta(n)-1)(*) \qquad \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{p^q}{\mathrm{e}^{2p}q!} \qquad \sum_{\substack{n,k\geqslant 1\\ n>k}} \frac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}(*)$$

Exemple initial de non sommabilité avec $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ où la mise en paquets donne des sommes différentes, pour bien montrer la problématique.

Si Ω est un ensemble, on appelle *tribu* sur Ω une partie $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω telle que :

— $\Omega \in \mathcal{A}$,

— pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$,

— pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, la réunion $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

Stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.
L'ensemble Ω est l'univers ; il n'est pas en général précisé. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont les événements. Les étudiants doivent savoir expliciter un événement à partir d'autres événements en utilisant la réunion, l'intersection et le complémentaire, différence, privé de. On fait le parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste.
L'événement $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ est réalisé si et seulement si, pour tout n de $\mathbb{N}$, A_n est réalisé.
L'événement $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est réalisé si et seulement si, il existe n de $\mathbb{N}$, tel que A_n est réalisé.
Exemple de la tribu totale $\mathcal{P}(\Omega)$.

Si Ω est un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω, on appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ telle que :

— $P(\Omega) = 1$,

— pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements incompatibles (deux à deux disjoints),

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

(ce qui sous-entend la convergence de la série numérique ou la sommabilité de la famille dénombrable).

On appelle espace probabilisé un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ est une tribu et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Propriétés d'une probabilité : probabilité de l'événement impossible, probabilité de la réunion combinée à l'intersection, de l'événement contraire (*), de la différence, croissance.

Questions de cours :

— Les énoncés des définitions, des théorèmes.
— Les démonstrations marquées par (*).
— Les méthodes usuelles sur des exemples.