Devoir surveillé n°4
3 heures

Échauffement

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Que vaut $f(0)$?
2. Montrer que si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh}(\sqrt{x})$.
3. Donner une expression à l'aide de fonctions usuelles de $f(x)$ pour $x < 0$.

Exercice I

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$a_{n+1} = 2a_n + 2^n \qquad (E)$$

On donne deux méthodes pour calculer a_n en fonction de n.

1. En posant $c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$, trouver une relation entre c_{n+1} et c_n. En déduire une expression explicite de c_n en fonction de n puis une expression explicite de a_n en fonction de n.
2. **Attention : on suppose ici ne pas connaître la valeur de a_n obtenue dans la question précédente.** On introduit la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, de rayon R, et on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

   (a) Montrer que (a_n) est une suite de réels strictement positifs.
   (b) Sachant que $a_{n+1} \geqslant 2^n$, montrer que $R \leqslant \frac{1}{2}$.
   (c) En utilisant la relation (E), montrer que si $|x| < \frac{1}{2}$, alors

$$\frac{f(x) - 1}{x} = 2f(x) + \frac{1}{1-2x}$$

   (d) En déduire une expression explicite de $f(x)$ en fonction de x. On trouvera

$$f(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{x}{(1-2x)^2}.$$

   (e) Retrouver l'expression explicite de a_n en fonction de n.
   (f) Quel est l'intérêt méthodologique de la seconde méthode ?

Exercice II

On considère l'équation différentielle

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) - \lambda y = 0 \qquad (E)$$

où λ désigne un paramètre réel.

1. On suppose que $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence strictement positif, solution de (E). Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_{n+1} = \frac{n+\lambda}{(n+1)^2} a_n$$

   Montrer par récurrence que

$$a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\lambda+k)}{(n!)^2} a_0$$

   avec la convention qu'un produit vide vaut 1.

2. Réciproquement, on considère la série entière la série entière $f_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec (a_n) la suite définie par

$$a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\lambda+k)}{(n!)^2}$$

   (avec donc $a_0 = 1$) de rayon R_λ.

   (a) Préciser R_λ et f_λ pour $\lambda \in \{1, 0, -1, -2\}$.

   (b) Pour quelles valeurs de λ la fonction f_λ est-elle une fonction polynôme ? Préciser son degré en fonction de λ et son coefficient de plus haut degré (coefficient dominant).

   (c) Lorsque λ est différent des valeurs obtenues dans la question précédente, quel est le rayon de convergence R_λ ?

3. Soit $b \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$, prenant la valeur b en 0. On précisera l'écriture générale de la série entière solution.

Exercice III

1. (a) Rappeler la définition de la fonction Arctan, ainsi que son tableau de variation et sa dérivée. Justifier que pour tout réel x, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ |\operatorname{Arctan}(x)| \leqslant |x|.$$

   (b) Étudier et représenter la fonction $g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \operatorname{Arctan}(\tan(x)).$$

   (c) Pour $x > 0$, soit $\psi(x) = \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x)$. Calculer la dérivée $\psi'(x)$. En déduire une relation entre $\operatorname{Arctan}(x)$ et $\operatorname{Arctan}(1/x)$ pour $x > 0$.

(d) Déterminer le développement en série entière de la fonction Arctan sur $]-1,1[$.

2. On considère la fonction h définie par $h(0)=1$ et pour tout réel $x \neq 0$,

$$h(x) = \frac{\text{Arctan}(x)}{x}.$$

(a) Justifier que pour tout $x \in [-1,1]$, on a

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)}$$

On traitera le cas $|x|<1$ et on étendra le résultat au cas $|x|=1$, en utilisant un argument à préciser sur la continuité sur $[-1,1]$ de la somme de la série de fonctions.

(b) Justifier que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (on raisonnera sur $]-1,1[$ puis sur $\mathbb{R}$.)

3. Soit $H(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} \mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que H est bien définie et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; préciser H'.

(b) Trouver une relation entre $H(x)$ et $G(x) = H(1/x)$ pour $x > 0$.
Pour cela, on pourra utiliser G'.

(c) Soit $f(x) = \frac{H(x)}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0)=1$.
Montrer que f est développable en série entière sur $[-1,1]$, et que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Donner une relation entre $f(x)$ et $f(1/x)$ pour $x > 0$.

Exercice IV : Théorème de Liouville

On se propose de démontrer le théorème de Liouville[1] : étant donnée une fonction entière, c'est à dire une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ développable en série entière de rayon $+\infty$, si f est bornée, alors f est constante (généralisation du résultat classique suivant : un polynôme réel ou complexe bornée est constant).

On considère donc une série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ de rayon infini, et on pose pour tout complexe z,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

1. Montrer que, pour tout n et p entiers naturels

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-p)\theta} \mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ 2\pi & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Soit $r \in \mathbb{R}^+$ et p entier, on considère l'intégrale

$$I_{r,p} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right) \mathrm{e}^{-ip\theta} \mathrm{d}\theta$$

et la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} f_n$ avec

$$f_n(\theta) = a_n r^n \mathrm{e}^{i(n-p)\theta}$$

1. le théorème de Liouville permet (c'est une des preuves possibles) de démontrer le théorème de Gauss : tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine complexe.

(a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.

(b) En déduire que

$$I_{r,p} = a_p r^p$$

3. Montrer que si f est bornée, par B, alors $|I_{r,p}| \leqslant B$ pour tout $r \in \mathbb{R}^+$ et p entier et en déduire que f est constante.

Fin

Échauffement

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$. On a $f(0) = 1$.
2. Soit $x > 0$, on a
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh}(\sqrt{x}).$$
3. Soit $x < 0$, $-x > 0$, et
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-x)^n}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{-x})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \sin(\sqrt{-x}).$$

Exercice I

1. On pose $c_n = \frac{a_n}{2^n}$, on a
$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$$
et ainsi
$$c_{n+1} = c_n + \frac{1}{2}$$
avec $c_0 = 1$. D'où (suite arithmétique)
$$c_n = \frac{n}{2} + 1$$
et ainsi $a_n = 2^n c_n = (n+2)2^{n-1}$.
2. On introduit la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$, de rayon R, et on pose
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$
   (a) On a si $n \geqslant 1$, $0 \leqslant a_n \geqslant 2^{n-1}$; or la série entière $\sum 2^{n-1} z^n$ est de rayon $\frac{1}{2}$, et ainsi $R \geqslant \frac{1}{2}$.

   (b) Si $|x| < \frac{1}{2}$, alors
$$a_{n+1}x^{n+1} = 2x a_n x^n + x 2^n x^n$$
   d'où
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} = 2xf(x) + \frac{x}{1-2x}$$
   soit encore sachant que $a_0 = 1$,
$$f(x) - 1 = 2xf(x) + \frac{x}{1-2x}$$
   et ainsi si $x \neq 0$,
$$\frac{f(x)-1}{x} = 2f(x) + \frac{1}{1-2x}$$

(c) On a alors

$$(1-2x)f(x) = 1 + \frac{x}{1-2x}$$

et donc

$$f(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{x}{(1-2x)^2}$$

(d) Ainsi sachant que

$$\left(\frac{1}{1-2x}\right)' = \frac{2}{(1-2x)^2}$$

nous avons

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n + \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n2^n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n2^{n-1}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)2^{n-1}x^n \end{aligned}$$

et ainsi pour tout entier n, on retrouve (unicité du développement en série entière)

$$a_n = (n+2)2^{n-1}$$

(e) La seconde méthode est plus compliquée sur cet exemple, mais c'est une méthode qui est généralisable à d'autres situations analogues.

Exercice II

1. La fonction S est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R,$ et on peut dériver terme à terme et ainsi

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

et

$$S''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^{n-1}$$

Comme S solution sur $]-R, R[$, nous avons sur $]-R, R[$,

$$xS''(x) + S'(x) - xS'(x) - \lambda S(x) = 0$$

soit en remplaçant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n - \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

et ainsi par unicité du développement en série entière, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ (n+1)^2 a_{n+1} - (\lambda+n)a_n = 0$$

soit encore

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_{n+1} = \frac{(\lambda+n)}{(n+1)^2}a_n$$

On procède alors par récurrence sur n pour vérifier la formule donnée par l'énoncé : elle est vraie au rang 0, avec la convention du produit vide. Si elle est vraie au rang n, alors

$$a_{n+1} = \frac{\lambda+n}{(n+1)^2}a_n = \frac{(\lambda+n)\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(\lambda+k)}{(n+1)^2(n!)^2} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(\lambda+k)}{[(n+1)!]^2}$$

ce qui achève la récurrence.

2. (a) Si $\lambda = 0$, ou $\lambda = -1$, ou $\lambda = -2$, les coefficients a_n deviennent nuls à partir d'un certain rang (respectivement 1,2 et 3) et ainsi $R_\lambda = +\infty$.

   Si $\lambda = 1$, les coefficients a_n sont tous strictement positifs et comme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+\lambda}{(n+1)^2} \longrightarrow 0$$

   on en déduit que $R_\lambda = +\infty$.

   Pour $\lambda = 0$, nous avons $a_0 = 1$ et si $n \geqslant 1$, $a_n = 0$ et ainsi $f_0(x) = 1$.

   Pour $\lambda = -1$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = a_3 = \cdots = 0$ et ainsi $f_{-1}(x) = 1 - x$.

   Pour $\lambda = -2$, $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = a_4 = \cdots = 0$ et ainsi $f_{-1}(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$.

   Pour $\lambda = 1$, nous avons $a_0 = 1$, et si $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

   et ainsi

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n = \mathrm{e}^x$$

   (on peut vérifier facilement qu'il s'agit bien d'une solution de (E)).

   (b) La remarque précédente se généralise : les coefficients a_n s'annulent à partir d'un certain rang si et seulement si $\lambda \in \mathbb{Z}_-$, ce qui correspond à la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f_λ soit un polynôme ; on obtient que ce polynôme est de degré $n = -\lambda$ avec

$$a_n = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(-n+k)}{(n!)^2} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

   (c) Dans le cas contraire, les coefficients a_n sont tous strictement positifs et on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+\lambda}{(n+1)^2} \longrightarrow 0$$

   on en déduit que $R_\lambda = +\infty$.

3. Dans la question 1., nous obtenons en fait en remontant les calculs, combiné au fait que la série entière obtenue est de rayon infini que nous avons des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier, que $a_0 = 1$ ou autre valeur. Nous avons donc déterminé toutes les solutions de (E) développables en séries entières. Ainsi la seule solution de (E) développable en série entière prenant la valeur b en zéro est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_\lambda(x) = b\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

avec

$$a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\lambda + k)}{(n!)^2}$$

Exercice III

1. (a) La fonction Arctan est par définition la réciproque de la fonction tan vue comme bijection continue strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. On donne ses variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{Arctan}'(x)$		$+$	1	$+$	
Arctan	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan'(\mathrm{Arctan}\, x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\mathrm{Arctan}\, x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

• On pose $f(x) = \mathrm{Arctan}(x) - x$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1 + x^2}$$

Ainsi la fonction f est strictement décroissante, et comme $f(0) = 0$, on obtient que :
– si $x \geqslant 0$, $(0 \leqslant)\, \mathrm{Arctan}(x) \leqslant x$
– si $x \leqslant 0$, $(0 \geqslant)\, \mathrm{Arctan}(x) \geqslant x$ (on peut aussi utiliser le caractère impaire de f).
On peut alors conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ |\,\mathrm{Arctan}(x)| \leqslant |x|.$$

• On peut aussi utiliser le théorème des accroissements finis sur $[0, x]$ pour $x > 0$, puis le caractère impaire de la fonction f.

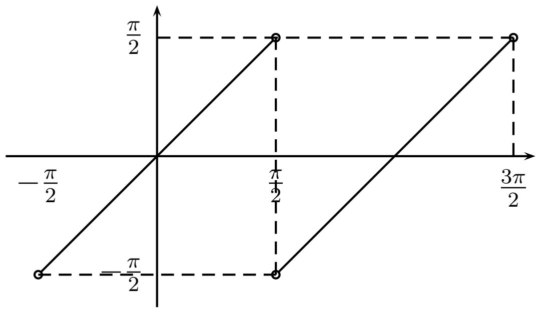
(b) Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$g(x) = \mathrm{Arctan}(\tan(x)) = x$$

et si $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, on a

$$g(x) = \mathrm{Arctan}(\tan(x)) = \mathrm{Arctan}(\tan(x - \pi)) = x - \pi$$

puisque $x - \pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On peut donner ainsi la représentation de g :



(c) On a ψ dérivable par opérations (somme et composée), et si $x > 0$,

$$\psi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Ainsi la fonction ψ est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On détermine cette constante avec

$$\psi(1) = 2\,\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x > 0\,,\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

(d) Pour $x \in]-1, 1[$, on rappelle que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

puis

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

puis puisque $x^2 \in [0, 1[$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

que l'on intègre terme à terme sur $]-1, 1[$ (légitime pour une série entière)

$$\text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

2. (a) Si $x \in]-1, 1[$, $x \neq 0$, on a

$$h(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)}$$

Pour $x = 0$, $h(0) = 1$ et la somme donne aussi 1.

On étudie maintenant le comportement aux extrémités. Pour $x = \pm 1$, on a déjà $h(x) = \frac{\pi}{4}$. On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)}$.

Pour tout $x \in [-1, 1]$, la suite $\left(\frac{x^{2n}}{2n+1}\right)$ est décroissante comme produit de deux termes positifs décroissants, et converge vers 0. Ainsi d'après le critère spéciale des séries alternées, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n+1)}$ converge et de plus on a une majoration du reste (par la valeur absolue du premier terme qui défini le reste)

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)}\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+3)} \leqslant \frac{1}{2n+3}$$

Ainsi $\| R_n \|_{\infty,[-1,1]}$ converge vers 0 et donc la série de fonctions converge uniformément sur $[-1,1]$ vers sa somme S, qui est donc continue puisqu'il s'agit d'une série de fonctions continues.

Or S coïncide avec h sur $]-1,1[$. Par continuité en 1 et -1 pour h, et 1^- et -1^+ pour S, on a donc $h(-1)=S(-1)$ et $h(1)=S(1)$. Ainsi

$$\forall x \in [-1,1]\,,\ h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)}$$

(b) Sur $]-1,1[$, h étant la somme d'une série entière, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Sur $\mathbb{R}^*$, h est le rapport de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Comme la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction H est la primitive de h qui s'annule en 0. Elle est donc dérivable de dérivée h continue et ainsi H est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $H'=h$.

(b) Soit $x>0$,

$$G'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).\frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}x\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x} = -\frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,x\right) = H'(x)-\frac{\pi}{2x}$$

que l'on intègre en ajustant la constante d'intégration avec le fait que $G(1)=H(1)$

$$G(x) = H(x) - \frac{\pi}{2}\ln(x)$$

et ainsi

$$\boxed{\forall x>0\,,\ H(x) = G(x) + \frac{\pi}{2}\ln(x).}$$

(c) Comme

$$\forall x \in [-1,1], h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}$$

avec une convergence uniforme, par intégration

$$H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

puis pour $x\neq 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)^2}$$

vraie aussi si $n=0$.

Ainsi f est développable en série entière sur $[-1,1]$ et ainsi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. Or f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sachant que $H'=h$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Ainsi la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Soit $x > 0$, on a

$$H(x) = H\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\pi}{2}\ln(x)$$

d'où

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = xH\left(\frac{1}{x}\right) = xH(x) - \frac{\pi}{2}x\ln x = x^2 f(x) - \frac{\pi}{2}x\ln x$$

Exercice IV

1. Soient n et p deux entiers naturels, nous avons si $n \neq p$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-p)\theta}\mathrm{d}\theta &= \left[\frac{1}{i(n-p)}\mathrm{e}^{i(n-p)\theta}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{i(n-p)}\left(\mathrm{e}^{i(n-p)2\pi} - 1\right) = 0\end{aligned}$$

et si $n = p$,

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-p)\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}\theta = 2\pi$$

Ainsi

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-p)\theta}\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n = p \\ 2\pi & \text{sinon} \end{cases}}$$

2. (a) Soit $\theta \in [0, 2\pi]$, nous avons

$$|f_n(\theta)| = |a_n|r^n$$

et ainsi $\| \ f_n \ \|_{[0,2\pi]} = |a_n|r^n$. Or comme la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon infini, la série numérique $\sum a_n r^n$ est absolument convergente, et donc on en déduit que la série numérique $\sum \| \ f_n \ \|_{[0,2\pi]}$ est convergente. Ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur $[0, 2\pi]$.

(b) Comme nous avons une série de fonctions continues sur $[0, 2\pi]$, qui converge donc uniformément, nous pouvons intégrer terme à terme et ainsi

$$\begin{aligned}I_{r,p} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)\mathrm{e}^{-p\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{i(n-p)\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-p)\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= a_p r^p\end{aligned}$$

3. On suppose que la fonction f est bornée, par B. Alors si $r \in \mathbb{R}^+$ et p entier, on a

$$|I_{r,p}| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} B\mathrm{d}\theta = B$$

et ainsi $|a_p r^p| \leqslant B$. Si nous prenons $p \geqslant 1$, $r > 0$, nous avons alors

$$|a_p| \leqslant \frac{b}{r^p}$$

et en faisant tendre r vers $+\infty$, on en déduit que $a_p = 0$. Ainsi $f(z) = a_0$ sur $\mathbb{C}$ et donc finalement la fonction f est bien constante.