Devoir °4

Exercice

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

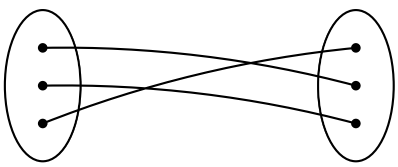
1. Montrer que
$$A = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant p} A_n$$
est un événement.

2. Déterminer une condition exprimée de la façon la plus simple possible sur la suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que A soit réalisé.

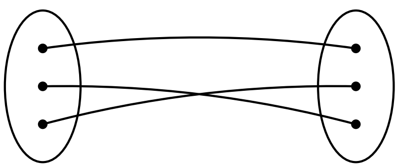
3. Même questions avec
$$B = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$$
On pourra raisonner par complémentaire.

Problème

Soit $n \geqslant 1$, on note E_n l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.
On appelle dérangement de E_n toute permutation de E_n qui n'admet pas de point fixe, c'est à dire telle que
$$\forall x \in E_n \,,\ f(x) \neq x$$
Par exemple



est un dérangement et



n'est pas un dérangement.

On note D_n le nombre de dérangement de E_n.

1. Calculer D_1, D_2 et D_3.
2. On note I_n^k le nombre de permutations de E_n ayant k points fixes exactement.
   (a) i. Calculer I_n^k pour $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant 3$.
   ii. Calculer I_n^n, I_n^{n-1} et I_n^{n-2}.
   iii. Montrer par dénombrement particulier des permutations que
   $$n! = \sum_{k=0}^{n} I_n^k$$
   iv. A. On fixe un élément de E_n. Déterminer le nombre de permutations de E_n qui laissent fixe cet élément.
   B. Montrer alors que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kI_n^k = n!$.
   C. Quel est le nombre moyen d'éléments invariants d'une permutation quelconque ? Vérifier le résultat pour $n = 1, 2, 3$.
   (b) Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$. Montrer que $I_n^k = \binom{n}{k} D_{n-k}$.
   (c) En déduire que
   $$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$$
   (d) En déduire une méthode pour calculer les D_n ; calculer D_4, D_5.
3. Calcul de D_n :
   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a :
   $$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$
   Donner la table des D_n jusqu'à $n = 10$.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :
   $$(E) \qquad D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$
   (c) En admettant que pour tout réel x on a : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$, déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$ de la probabilité qu'une permutation de n éléments ne laisse aucun point invariant.

* *
*