Quinzaine 6 du 11/12 au 12/01

Chapitre 4 : *Probabilités*
On appelle espace probabilisé un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ est une tribu et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Propriétés d'une probabilité : probabilité de l'événement impossible, probabilité de la réunion combinée à l'intersection, de l'événement contraire, de la différence, croissance.
Probabilité d'une réunion disjointe, d'une réunion quelconque de deux événements.

Propriétés :
– $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (et cas d'une intersection finie).
– Continuité croissante (*) : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que pour tout n, on ait $A_n \subset A_{n+1}$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

– Continuité décroissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que pour tout n, on ait $A_{n+1} \subset A_n$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

– Sous additivité : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements alors (avec conventions dans cas de divergence de la série) :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Dans le cas fini ou dénombrable avec la tribu totale, une probabilité est entièrement déterminée par la donnée des probabilités des singletons.
Équiprobabilité ou probabilité uniforme dans le cas fini ; détermination d'une probabilité par le rapport du nombre de cas favorables et du nombre de cas possibles.
Non existence de probabilité uniforme sur un univers dénombrable.
Si P est une probabilité sur un ensemble dénombrable $\{x_n\,,\, n \in \mathbb{N}\}$, alors $P(\{x_n\})$ converge forcément vers 0. Lien entre probabilité sur un univers dénombrable et série numérique à termes positifs de somme non nulle.

Remarque : événement presque sûr ou quasi certain, négligeable ou presque impossible ou quasi impossible. Exemple.

Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Notations $P_B(A)$, $P(A|B)$. L'application P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ (*).
Formule de Bayes. Exemple d'utilisation.
Formule des probabilité composées.

Système complet fini ou dénombrable d'événements. Exemple usuel de $(A, \overline{A})$ avec A un événement. Exemple de système dénombrable.
Formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et (avec conventions si $P(A_n)$ s'annule)

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)$$

La formule reste valable dans le cas d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$ (système quasi-complet).
Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout y de $X(\Omega) = \operatorname{Im} X$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement.
Pour $A \subset X(\Omega)$, $(X \in A)$ est un événement. Notation $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$, $(X \geqslant x)$ et analogues lorsque X est à valeurs réelles.
Cas d'une variable aléatoire (discrète) à valeurs dans $\mathbb{N}$: liens entre $(X = n)$, $(X < n)$, $(X > n)$, $(X \leqslant n)$ et $(X \geqslant n)$, décomposition de $(X + Y = n)$.

Loi d'une variable aléatoire discrète. La loi de X notée P_X est déterminée par la donnée des $P(X = x)$, $x \in X(\Omega)$.
On note $X \sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loi, sans soulever de difficulté sur cette notation.
Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

Pour p dans $]0, 1[$, loi géométrique de paramètre p ; la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \,,\; p(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

Notation $X \sim \mathcal{G}(p)$. (Espérance $\frac{1}{p}$).
La loi géométrique peut être interprétée comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
On a pour tout entier n, $\mathbb{P}(X > n) = (1 - p)^n$ (*). (Espérance $\frac{1}{p}$).

Caractérisation comme loi dans mémoire (ce n'est plus au programme officiel)

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N} \,,\; \mathbb{P}(X > n + k | X > n) = \mathbb{P}(X > k).$$

Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \,,\; P(X = n) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

Interprétation en termes d'événements rares, modélisation par une variable aléatoire où λ est le nombre moyen de cas par une certaine unité. Notation $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. (Espérance λ).

Indépendances de deux événements. L'indépendance n'est pas une notion intrinsèque, elle dépend du choix de la probabilité.
Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B est équivalente à $P(A|B) = P(A)$.
Indépendance (mutuelle) d'une famille finie d'événements. L'indépendance deux à deux des événements $A_1, \ldots, A_n$ n'entraîne pas leur indépendance (mutuelle) si $n \geqslant 3$: un exemple avec $n = 3$.

Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ aussi (*). Extension au cas de n événements.

Deux variables aléatoires X et Y discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont dites indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants, c'est à dire si

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

On note $X \perp\!\!\!\perp Y$. De façon équivalente, la distribution de probabilité de (X, Y) est donné par

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x).P(Y = y).$$

Extension au cas de n variables aléatoires.

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors, pour toutes fonctions f et g, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. Extension au cas de plusieurs variables aléatoires.
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ le sont aussi. Extension à plusieurs coalitions.
Suite de variables aléatoires indépendantes. Suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (suites i.i.d).
On ne soulève aucunes difficultés sur l'existence d'un espace probabilisé portant une suite de variables aléatoires i.i.d.
Application à la modélisation d'un jeu de pile ou face infini par une suite de variables aléatoires de Bernoulli (mutuellement) indépendantes.
Exemple : somme de deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson (*), de deux variables indépendantes suivant des géométrique indépendantes de même paramètre (vu en exercice)

Questions de cours :

- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.