Devoir °4

Exercice

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

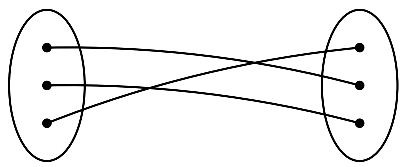
1. Montrer que
$$A = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant p} A_n$$
est un événement.

2. Déterminer une condition exprimée de la façon la plus simple possible sur la suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que A soit réalisé.

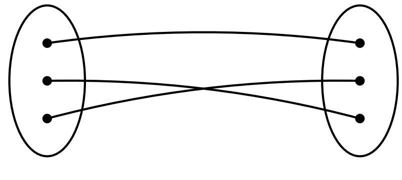
3. Mêmes questions avec
$$B = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$$
On pourra raisonner par complémentaire.

Problème

Soit $n \geqslant 1$, on note E_n l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.
On appelle dérangement de E_n toute permutation de E_n qui n'admet pas de point fixe, c'est à dire telle que
$$\forall x \in E_n\ ,\ f(x) \neq x$$
Par exemple



est un dérangement et



n'est pas un dérangement.

On note D_n le nombre de dérangement de E_n.

1. Calculer D_1, D_2 et D_3.
2. On note I_n^k le nombre de permutations de E_n ayant k points fixes exactement.
   (a) i. Calculer I_n^k pour $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant 3$.
   ii. Calculer I_n^n, I_n^{n-1} et I_n^{n-2}.
   iii. Montrer par dénombrement particulier des permutations que
   $$n! = \sum_{k=0}^{n} I_n^k$$
   iv. A. On fixe un élément de E_n. Déterminer le nombre de permutations de E_n qui laissent fixe cet élément.
   B. Montrer alors que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k I_n^k = n!$.
   C. Quel est le nombre moyen d'éléments invariants d'une permutation quelconque ? Vérifier le résultat pour $n = 1, 2, 3$.

   (b) Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$. Montrer que $I_n^k = \binom{n}{k} D_{n-k}$.

   (c) En déduire que
   $$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$$

   (d) En déduire une méthode pour calculer les D_n ; calculer D_4, D_5.
3. Calcul de D_n :
   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a :
   $$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$
   Donner la table des D_n jusqu'à $n = 10$.

   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :
   $$(E) \qquad D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

   (c) En admettant que pour tout réel x on a : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$, déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$ de la probabilité qu'une permutation de n éléments ne laisse aucun point invariant.

* *

*

Exercice

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{n \geqslant p} A_n$ étant une intersection dénombrable d'événements, c'est aussi un événement, et ainsi par réunion dénombrable, A est bien un événement.
2. On a A réalisé si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\bigcap_{n \geqslant p} A_n$ soit réalisé, c'est à dire si et seulement si il existe un rang (p) à partir duquel les A_n sont tous réalisés, c'est à dire si et seulement si **en fait il n'y a qu'un nombre fini de A_n qui ne sont pas réalisés, ou de façon plus juste, si l'ensemble des indices n tel que A_n non réalisé est fini**. On remarquera aussi que suite
$$\left(\bigcap_{n \geqslant p} A_n\right)_{n \geqslant 0}$$
est une suite croissante d'événements (on en intercepte de moins en moins).
3. On remarque que
$$\overline{B} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n \geqslant p} A_n} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geqslant p} \overline{A_n}$$
Or les $\overline{A_n}$ sont des événements, et ainsi d'après la question 1., $\overline{B}$ est un événement, et donc B aussi.
On peut bien sûr procéder directement.

Ainsi $\overline{B}$ est réalisé si et seulement il n'y a qu'un nombre fini de $\overline{A_n}$ qui ne sont pas réalisés, soit encore si et seulement si il n'y a qu'un nombre fini d'indice n tels que A_n soit réalisé. Donc B est réalisé si et seulement si il y a un nombre infini d'indice n tels que A_n soit réalisé.

On remarquera aussi que suite
$$\left(\bigcup_{n \geqslant p} A_n\right)_{n \geqslant 0}$$
est une suite décroissante d'événements (on en réuni de moins en moins)

Problème :

1. $D_1 = 0$, $D_2 = 1$ et $D_3 = 2$.
2. (a) i. On a :
$I_1^0 = 0$, $I_1^1 = 1$.
$I_2^0 = 1$, $I_2^1 = 0$, $I_2^2 = 1$.
$I_3^0 = 2, I_3^1 = 3, I_3^2 = 0$ et $I_3^3 = 1$.

ii. $I_n^n = 1$: il n'y a que l'identité qui laissent tous les points invariants.

$I_n^{n-1} = 0$: si $n-1$ éléments au moins sont invariants, le dernier l'est forcément aussi.

Si $n \geqslant 2$, pour construire une permutation qui laisse invariant $n-2$ éléments, on choisit ces $n-2$ points soit $\binom{n}{2}$ choix. Les deux autres éléments sont forcément permutés. Donc $I_n^{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

iii. Parmi les $n!$ permutations de n éléments, il y a celles qui :
- laissent 0 élément invariant soit I_n^0 permutations
- laissent 1 élément invariant, soit I_n^1 permutations

$\vdots$

- laissent k éléments invariants, soit I_n^k permutations

$\vdots$

- laissent n éléments invariants, soit I_n^n permutations

Donc $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_n^k$.

iv. A. Soit a de $\{1, \ldots, n\}$. Cet élément étant fixé, les autres sont permutés. Le nombre cherché est donc $(n-1)!$.

B. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kI_n^k$ est la somme des invariants de toutes les permutations. Un élément a intervient $(n-1)!$ fois d'après la question précédente, d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kI_n^k = n(n-1)! = n!$.

On peut aussi écrire (avec les questions suivantes)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kI_n^k &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} I_{n-k}^0 = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} I_{n-k}^0 \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} I_{n-1-k}^0 = n\sum_{k=0}^{n-1} I_{n-1}^k = n(n-1)! = n!\end{aligned}$$

C. Le nombre de permutations est $n!$ et le nombre d'invariants aussi, ainsi le nombre moyen d'éléments invariants d'une permutation est égal à 1.

(b) Pour construire une permutation laissant k éléments invariants, on choisit k ces k éléments soit $\binom{n}{k}$ choix puis les $n-k$ sont permutés sans points fixes, soit I_{n-k}^0 possibilités d'où le résultat.

(c) On a :

$$n! = \sum_{k=0}^{n} I_n^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} I_{n-k}^0 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k} I_{n-k}^0 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} I_k^0$$

(d) On a

$$4! = 24 = D_0 + 4D_1 + 6D_2 + 4D_3 + D_4$$

et ainsi $D_4 = 24 - 1 - 4\times 0 - 6\times 1 - 4\times 2 = 9$. On a aussi

$$5! = 120 = D_0 + 5D_1 + 10D_2 + 10D_3 + 5D_4 + D_5$$

et ainsi $D_5 = 120 - 1 - 10 - 20 - 45 = 44$.

On en déduit alors la table des I_n^k suivante :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	1	0	1				
3	2	3	0	1			
4	9	8	6	0	1		
5	44	45	20	10	0	1	
6	265	264	135	40	15	0	1

3. (a) Pour $n = 1$, on a $I_1^0 = 0$ et $1 \times I_0^0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$.
On suppose que l'égalité est vraie jusqu'au rang n, alors :

$$\begin{aligned}
D_{n+1} = I_{n+1}^0 &= (n+1)! - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} I_k^0 = (n+1)! - 1 - \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} I_k^0 \\
&= (n+1)! - 1 - \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} (kI_{k-1}^0 + (-1)^k) \\
&= (n+1)! - 1 - \sum_{k=1}^{n} (n+1)\binom{n}{k-1} I_{k-1}^0 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} \\
&= (n+1)! - 1 - (n+1)\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} I_k^0 - \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} + 1 + (-1)^{n+1} \\
&= (n+1)! - (n+1)[n! - I_n^0] - 0 + (-1)^{n+1} = (n+1)I_n^0 + (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.
On en déduit alors la table suivante :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_n	1	0	1	2	9	44	265	1854	14833	133496	1334961

(b) Pour $n = 0$, cela est vérifié.
On le suppose pour n, alors :

$$\begin{aligned}
I_{n+1}^0 &= (n+1)I_n^0 + (-1)^{n+1} \\
&= (n+1)n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+1} \\
&= (n+1)! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + (n+1)! \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= (n+1)! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

(c) La probabilité qu'un permutation de n éléments ne laisse aucun point invariant est

$$P_n = \frac{I_n^0}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

dont la limite est e^{-1} soit environ $0,37$.