Devoir surveillé n°5
2 heures

Dénombrement chez E3A

1. Montrer de deux manières différentes que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, par dénombrement ensembliste et par un calcul.
2. Soient p, q et r trois entiers naturels et A un ensemble fini de cardinal $p+q$.
En **dénombrant de deux façon différentes** les parties de A de cardinal r, montrer sans aucun calculs, que l'on a :
$$\sum_{k=0}^{r}\binom{p}{k}\binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}$$
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Et CCINP alors ? Et bien, pas de jaloux.

Présentation générale

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité 1/2 et face avec la probabilité 1/2). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'évènement [le k-ième lancer de la pièce donne pile] et par F_k l'évènement [le k-ième lancer de la pièce donne face].
On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n° 1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n° 2 commence au lancer suivant la fin de la série n° 1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.
Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

Exemple 1 : $$\underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n}^\circ 1} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n}^\circ 2} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n}^\circ 3} \cap F_8 \cap \cdots .$$

Exemple 2 : $$\underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n}^\circ 1} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n}^\circ 2} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k\right)}_{\text{Série n}^\circ 3} .$$

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

- si la série n° 1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;
- sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n° 1.

Ainsi, si l'évènement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'évènement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I.1 - Calcul de la somme d'une série entière

1. Rappeler (sans le démontrer) le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum_{k \geq 0} x^k \,.$$

2. En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{k \geq 0} k x^k$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

I.2 - Étude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Exprimer l'évènement $(L_1 = k)$ en fonction des évènements P_i et F_i pour $i \in [\![1, k+1]\!]$.
2. Montrer que $P(L_1 = k) = 2^{-k}$.
3. En déduire la valeur de $P(L_1 = 0)$.

Partie II - Étude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'évènement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4 \,.$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Généralités

4. Déterminer les lois de N_1 et N_2.
5. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

II.2 - Relation de récurrence pour la loi de N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n.

6. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Justifier que l'on a l'égalité d'évènements :

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1} \,,$$

puis en déduire que :

$$P\left((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\right) = \frac{1}{2} P\left((N_n = k) \cap P_n\right) \,.$$

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ les relations :

$$P\left((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}\right) = \frac{1}{2} P\left((N_n = k) \cap F_n\right) \,,$$

$$P\left((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}\right) = \frac{1}{2} P\left((N_n = k-1) \cap P_n\right) \,,$$

$$P\left((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}\right) = \frac{1}{2} P\left((N_n = k-1) \cap F_n\right) \,.$$

7. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ la relation :

$$P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2} P(N_n = k) + \frac{1}{2} P(N_n = k-1) \,.$$

8. Déterminer $P(N_n = 1)$.
9. Quelle relation vérifie les $(a_{n,k})$ avec $a_{n,k} = 2^{n-1} P(N_n = k)$? Que reconnaît-on ? En déduire l'expression de $P(N_n = k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.
10. Pourrait-on déterminer directement $P(N_n = k)$ par un raisonnement astucieux ?

Fin

Dénombrement chez E3A

1. Nous avons d'après la formule du binôme

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Autre méthode : on dénombre les parties d'un ensemble E de cardinal n : on sait qu'il y en a 2^n. Parmi ces parties, il y a celles qui sont :
– de cardinal 0 ; il y en a $1 = \binom{n}{0}$
– de cardinal 1 ; il y en a $n = \binom{n}{1}$
$\vdots$
– de cardinal k ; il y en a $\binom{n}{k}$
$\vdots$
– de cardinal n ; il y en a $1 = \binom{n}{n}$
Ainsi par exclusion et disjonction des cas, on a bien

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

2. Soient p, q et r trois entiers naturels et A un ensemble fini de cardinal $p+q$.
On dénombre les parties de A de cardinal r, il y en a $\binom{p+q}{r}$; on scinde A en deux parties B et C disjointes, l'une de cardinal p et l'autre de cardinal q.
Parmi ces parties, il y a celles qui ont :
– 0 élément dans B, r éléments dans C : il y en a $\binom{p}{0}\binom{q}{r}$
– 1 élément dans B, $r-1$ éléments dans C : il y en a $\binom{p}{1}\binom{q}{r-1}$
$\vdots$
– k éléments dans B, $r-k$ éléments dans C : il y en a $\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}$
$\vdots$
– r éléments dans B, 0 élément dans C : il y en a $\binom{p}{r}\binom{q}{0}$
Ainsi par exclusion et disjonction des cas, on a bien

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}$$

3. En prenant $p = q = r = n$ dans la question précédente, nous obtenons donc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

soit encore par symétrie des coefficients de Newton

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Partie I - Étude de la longueur de la première série

1. D'après le cours, la série entière $\sum_{k\geq 0} x^k$ a $\boxed{\text{un rayon de convergence égal à } 1}$ et a pour somme la fonction $\boxed{x \mapsto \dfrac{1}{1-x}}$.

2. D'après le cours, la somme d'une série entière de la variable réelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et les dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme. En particulier, soit $x \in]-1,1[$. La série de terme général kx^{k-1}, $k \in \mathbb{N}^*$, converge de somme $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. En multipliant par x et en constatant que le terme d'indice $k=0$ est nul, on en conclut que $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geq 0} kx^k \text{ converge et qu'on a } \sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \dfrac{x}{(1-x)^2}}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'évènement $(L_1 = k)$ est réalisé si et seulement si la première série est de longueur k, c'est-à-dire les k premiers lancers donnent le même résultat et le $(k+1)$-ième lancer donne un résultat différent. On a donc
$$\boxed{(L_1 = k) = (P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1})}.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Les évènements $P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}$ et $F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}$ étant incompatibles, on a
$$P(L_1 = k) = P\left(P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}\right) + P\left(F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}\right).$$
Par indépendance des lancers, on a alors
$$P(L_1 = k) = P(P_1)\times\ldots\times P(P_k)\times P(F_{k+1}) + P(F_1)\times\ldots\times P(F_k)\times P(P_{k+1}) = \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2}{2^{k+1}}$$
d'où $\boxed{P(L_1 = k) = 2^{-k}}$.

3. Par définition, la variable aléatoire L_1 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. La série de terme général $P(L_1 = k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge donc de somme 1. On a alors $P(L_1 = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}$. Or, $\dfrac{1}{2}$ appartient à l'intervalle $]-1,1[$ donc, d'après la question 14, on a
$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1\,.$$
On a ainsi $\boxed{P(L_1 = 0) = 0}$.

D'après la question 17, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $kP(L_1 = k) = k\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$. Cette égalité est aussi valable lorsque $k = 0$. Or, d'après la question 15, la série $\sum_{k\geq 0} k\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ converge de somme $\dfrac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$. En particulier, la série de terme général $kP(L_1 = k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge donc, par positivité, converge absolument de somme 2, ce qui signifie que $\boxed{L_1 \text{ admet une espérance égale à } 2}$. Ainsi, en moyenne, la première série dans la suite de lancers est de longueur 2.

Partie II - Étude du nombre de séries

4. La variable aléatoire N_1 représente le nombre de séries apparues en un lancer, elle ne peut donc prendre que la valeur 1.
   La variable aléatoire N_2 représente le nombre de séries apparues lors des deux premiers lancers, elle prend donc la valeur 1 si les 2 premiers lancers donnent le même résultat, la valeur 2 s'ils donnent des résultats différents. On a

$$\begin{aligned} P(N_2 = 1) &= P((P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)) \\ &= P(P_1 \cap P_2) + P(F_1 \cap F_2) \qquad \text{(incompatibilité)} \\ &= P(P_1)P(P_2) + P(F_1)P(F_2) \qquad \text{(indépendance)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

   On a donc nécessairement $P(N_2 = 2) = 1 - P(N_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$.
   En conclusion, $\boxed{N_1 \text{ suit la loi certaine de valeur } 1}$ et $\boxed{N_2 \text{ suit la loi uniforme sur } \{1; 2\}}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Au cours des n premiers lancers, au moins une série apparaît (celle contenant le résultat du premier lancer) et, au maximum, n séries apparaissent (car chaque série contient au moins un résultat). $\boxed{\text{La variable aléatoire } N_n \text{ prend donc ses valeurs dans l'ensemble } [\![1, n]\!].}$
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Si l'évènement $P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé, alors le n-ième et le $(n+1)$-ième lancers donnent le même résultat, donc le $(n+1)$-ième résultat contribue à la série contenant le n-ième résultat et on a $N_n = N_{n+1}$. On a donc l'égalité d'évènements

$$\boxed{(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}}.$$

   Puisque les évènements $(N_n = k)$ et P_n sont indépendants du $(n+1)$-ième lancer, on en déduit que

$$P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = P((N_n = k) \cap P_n)P(P_{n+1}) = \boxed{\frac{1}{2}P((N_n = k) \cap P_n)}.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les évènements $P_n \cap P_{n+1}$, $F_n \cap F_{n+1}$, $F_n \cap P_{n+1}$ et $P_n \cap F_{n+1}$ décrivent les quatre résultats possibles pour les n-ième et $(n+1)$-ième lancers. Ils sont donc deux à deux incompatibles et ont pour réunion l'évènement certain, formant ainsi un système complet d'évènements. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, on a donc

$$\begin{aligned} P(N_{n+1} = k) &= P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) + P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) \\ &\qquad + P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) + P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap P_n) + \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap F_n) \\ &\qquad + \frac{1}{2}P((N_n = k-1) \cap F_n) + \frac{1}{2}P((N_n = k-1) \cap P_n) \quad \text{(question 22)} \\ &= \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap (P_n \cup F_n)) + \frac{1}{2}P((N_n = k-1) \cap (P_n \cup F_n)) \qquad \text{(incompatibilité)} \end{aligned}$$

   d'où $\boxed{P(N_{n+1} = k) = \dfrac{1}{2}P(N_n = k) + \dfrac{1}{2}P(N_n = k-1)}$.
8. On a $P(N_n = 1) = P((F_1 \cdots F_n)) + P((P_1 \cdots P_n)) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

9. On multiplie la relation par 2^n :

$$a_{n+1,k} = a_{n,k} + a_{n,k-1}$$

ce qui donne une relation de type coefficients binomiaux. On a $a_{n,1} = 1$, $a_{n,n} = 1$, $a_{n,k} = 0$ si $k > n$. Ainsi (il faut décaler) $a_{n,k} = \binom{n-1}{k-1}$ puis

$$P(N_n = k) = \frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{k-1}$$

10. En effet, il y a en tout 2^n tirages, et pour construire un tirage avec k séries sur n éléments (cas favorables), il suffit de choisir les $k-1$ changements parmi $n-1$ positions, avec pour le premier tirage 2 possibilités. Ainsi

$$P(N_n = k) = 2 \times \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{k-1}$$