Quinzaine 8 du 29/01 au 09/02

Chapitre 5 : *Espaces vectoriels*
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.
En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \oplus E_i$.
Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.
Si $F_1, \ldots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.
Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme.
Si u et v commutent, alors le noyau de u (ainsi que l'image de u) est stable par v (*).

Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition). Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.
Polynôme annulateur.
Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent.
Adaptation de ces résultats aux matrices carrées. Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
Application au calcul de l'inverse et des puissances.
Le noyau de $P(u)$ est stable par u.

Base $(L_0, \ldots, L_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs élémentaires de Lagrange en $n+1$ points distincts $a_0, \ldots, a_n$ de $\mathbb{K}$ avec

$$L_i = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (X - a_j)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_i - a_j)}$$

Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base, $P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$.

La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points est le polynôme constant égal à 1.
Déterminants. Exemples et calculs de déterminants.
Déterminant de Vandermonde (*). Lien entre déterminant de Vandermonde et l'interpolation de Lagrange.

Droite stable par un endomorphisme.
Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.
Exemples de recherches de valeurs propres et de vecteurs propres à partir de la définition : équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$; équation aux éléments propres $AX = \lambda X$.
Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice carrée.
La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe (*).
Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Questions de cours :

- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.