Devoir n°5

Notations :

On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

À toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on associera l'unique endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est M et on dira que c'est l'endomorphisme canoniquement associé à M.

Dans tout le problème, on notera

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

On rappelle que par convention $A^0 = I$.

L'objet de ce problème est de calculer A^n par diverses méthodes pour $n \in \mathbb{N}$ ou $n = -1$.

Partie A : Calcul de A^n par les suites.

1. Calculer la matrice $B = \dfrac{1}{3}(A - I)$ puis B^2.
2. Démontrer que l'on peut écrire
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; A^n = I + u_n B$$
avec la condition sur la suite (u_n)
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+1} = 3 - 2u_n$$
Comment appelle t-on ce genre de suite ?
3. Calculer u_n en fonction de n (on rappelle que l'on commence par résoudre $x = 3 - 2x$...)
4. Donner l'expression de A^n en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}$.
5. La formule obtenue ci-dessus est-elle valable pour $n = -1$? Et pour $n \in \mathbb{Z}^-$?

Partie B : Calcul de A^n par les polynômes.

1. Démontrer que la matrice A vérifie $A^2 + A - 2I = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = X^2 + X - 2$. Déterminer les racines réelles de P et déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P.
3. En utilisant la question précédente, retrouver la valeur de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.

Partie C : Calcul de A^n par la diagonalisation.

On appelle f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Déterminer χ_f. En déduire le spectre de f.
2. Déterminer les espaces propres de f et en déduire que f est diagonalisable, à l'aide d'une base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera.
3. Que valent $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$? En déduire la matrice D de f par rapport à la base (u, v, w). Quelle est la relation entre A et D ?
4. Calculer D^n pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que $A = PDP^{-1}$ puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; A^n = PD^nP^{-1}$$

6. Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.
   Calculer P^{-1} à l'aide du pivot de Gauss.
7. Retrouver, à l'aide de la question précédente, la valeur de A^n pour $n \in \mathbb{N}$. Et si $n \in \mathbb{Z}^-$?