Quinzaine 9 du 12/02 au 08/03

Chapitre 5 : *Espaces vectoriels - Réduction*
Droite stable par un endomorphisme.
Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.
Exemples de recherches de valeurs propres et de vecteurs propres à partir de la définition : équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$; équation aux éléments propres $AX = \lambda X$.
Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice carrée.
La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.
Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Si un polynôme P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.
Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$ (*).
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Par convention le polynôme caractéristique est unitaire.
Notation χ_A, χ_u. Coefficients de degré 0 et $n-1$.
Les valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.
Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.
Multiplicité d'une valeur propre. Majoration (et minoration par 1) de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité (*).
Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.
Le théorème de Cayley-Hamilton : le polynôme caractéristique est annulateur. La démonstration n'est pas exigible.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Une telle base est constituée de vecteurs propres.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale. Interprétation en termes d'endomorphisme.
Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.
Dans la pratique des cas numériques, on se limitera à $n = 2$ ou $n = 3$.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace. Traduction matricielle.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propres associé est égale à sa multiplicité. Traduction matricielle.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable (*).
Polynôme caractéristique scindé à racines simples.
Interprétation matricielle de ces résultats.

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. La démonstration n'est pas exigible.

Traduction matricielle. Le lemme de décomposition des noyaux est hors programme.
L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable (*).
Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ pour polynôme annulateur.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire.
Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.
Un endomorphisme (une matrice carrée) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. La démonstration n'est pas exigible.
Dans $\mathbb{C}$, toute matrice carrée et tout endomorphisme est trigonalisable.
Traduction matricielle.
La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.

Questions de cours :

- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.