Devoir surveillé n°7
3 heures

Exercice I : réduction et application

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'endomorphisme canonique associé u.

1. Quel est le rang de A ? La valeur 0 est-elle valeur propre ?
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A et en déduire que le spectre de A est $\{1, 2\}$.
3. Déterminer les deux espaces propres $E_1(A)$ et $E_2(A)$ en précisant leurs dimensions et des bases. La matrice A est-elle diagonalisable ? Peut-on la réduire ?
4. Montrer que $E_2(A)$ admet un unique vecteur e_3 dont la troisième coordonnée vaut 1. Que vaut $u(e_3)$?
5. On pose $B = A - I_3$, d'endomorphisme associé $v = u - \mathrm{id}$. Calculer B et B^2.
6. Déterminer le noyau de v.
7. Déterminer le noyau de v^2 et en donner une équation cartésienne.
8. On pose $e_2 = (1, 0, -1)$. Montrer que $e_2 \in \operatorname{Ker} v^2$ et $e_2 \notin \operatorname{Ker} v$.
9. On pose $e_1 = v(e_2)$. Vérifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
10. Calculer $u(e_2)$ et $u(e_1)$ en fonction de e_1 et e_2 et donner la matrice de u dans (e_1, e_2, e_3), que l'on notera T.
11. On note P la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3). Préciser P et calculer P^{-1}.
12. Exprimer A en fonction de T puis montrer que pour tout entier n, on a $A^n = PT^nP^{-1}$.
13. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer T^n et en déduire A^n.
14. **Application :** on considère l'ensemble E des suite (u_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$$

   (a) On admet que l'application $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+3} - 4u_{n+2} + 5u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est linéaire. Que dire de E par rapport à φ ?

   (b) Montrer que $\theta : E \to \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi((u_n)) = (u_0, u_1, u_2)$ est un isomorphisme. Quelle est alors la dimension de E ?

   (c) Quelles sont les suites géométriques solutions de E. Peut-on en déduire une base de E ?

   (d) Soit (u_n) une suite de E. Pour tout entier n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.

   (e) En déduire que pour tout entier n, on a $X_n = A^nX_0$.

   (f) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, u_0, u_1 et u_2.

(g) En déduire une base de E.

Exercice II - Version *

Soit $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes. On pose

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{\boxed{n-2}} & a_1^{\boxed{n}} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}_{n,n}$$

On pose alors, pour tout z complexe

$$P_n(z) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \\ 1 & z & z^2 & \cdots & z^n \end{vmatrix}_{n+1,n+1}$$

1. Comment appelle-t-on le déterminant $P_n(z)$? Donner une expression factorisée de $P_n(z)$ en séparant les termes en z.
2. Justifiez que $P_n(z)$ est polynomiale en z de degré inférieur à n.
3. Déterminer D_n en fonction de $a_1, \dots, a_n$. On calculera de deux façons le coefficient de z^{n-1} dans $P_n(z)$.

Exercice II - Version light

Soit a, b, c, d des nombres complexes. On pose

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^{\boxed{2}} & a^{\boxed{4}} \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$$

On pose alors, pour tout z complexe

$$P(z) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & z & z^2 & z^3 & z^4 \end{vmatrix}$$

1. Comment appelle-t-on le déterminant $P(z)$? Donner une expression factorisée de $P(z)$ en séparant les termes en z.
2. Justifiez que $P(z)$ est polynomiale en z de degré inférieur à 4.
3. Déterminer D_4 en fonction de a, b, c et d. On calculera de deux façons le coefficient de z^3 dans $P(z)$.

Exercice III : CCP 2018 extraits

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.

On considère l'application Φ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X]\,,\ \Phi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \frac{1}{2^n n!}U_n^{(n)}$. Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre.*

1. (a) (*) Déterminer L_0 et L_1 et vérifier que $L_2 = \frac{1}{2}(3X^2-1)$.
   (b) (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que L_n est de degré n.
   (c) (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. (*) Prouver que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
   Dans la suite, n désigne un entier naturel.
3. (*) Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Φ.
   On note Φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Φ. Cet endomorphisme Φ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]\,,\ \Phi_n(P) = \Phi(P)$.
4. (*) On note $M = (m_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de Φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n(X]$. Montrer que la matrice M est triangulaire supérieure et que :
   $$\forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ m_{k,k} = k(k+1).$$
5. (*) Montrer que Φ_n est diagonalisable. *On pourra utiliser la question précédente.*
6. (*) Vérifier que :
   $$\forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ (X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0.$$
7. (**) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question précédente, montrer grâce à la formule de Leibniz [1] que
   $$(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$$
8. (*) Montrer que, pour $k \in [\![0,n]\!]$, le polynôme L_k est un vecteur propre de Φ_n, en précisant la valeur propre associée. *On pourra utiliser la question précédente.*
9. (***) Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de Φ.

Exercice IV : Centrale - Matrices de Hilbert

On définit pour tout n de $\mathbb{N}^*$ la matrice H_n par

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2\,,\ (H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$$

où $(H_n)_{i,j}$ désigne le coefficient de place (i,j) de la matrice H_n.
On note de plus $\Delta_n = \det H_n$.

1. si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, alors le produit fg aussi et on a

$$(fg)^{(p)} = \sum_{i=0}^{p} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(p-i)}$$

La formule n'était pas donnée dans l'énoncé original.

1. Calculer H_2 et H_3. Montrer que ce sont des matrices inversibles et déterminer leur inverse. Quelle remarque peut-on faire ?
2. Montrer la relation, lorsque $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Delta_{n+1} = \frac{(n!)^2}{(2n)!(2n+1)!}\Delta_n$$

Indication : on pourra commencer par soustraire la dernière colonne de Δ_{n+1} à toutes les autres, puis soustraire la dernière ligne à toutes les autres.
3. En déduire l'expression de Δ_n en fonction de n (on fera intervenir les quantités $c_m = \prod_{i=1}^{m-1} i!$ pour des entiers m adéquats).
4. Prouver que H_n est inversible, puis que $\det(H_n^{-1})$ est un entier.

Exercice V : Centrale, diagonalisation des matrices tridiagonales

Une matrice tridiagonale est une matrice de la forme

$$A_n(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{pmatrix}$$

où a, b et c sont des complexes.
On fixe (a, b, c) trois nombres complexes tels que $bc \neq 0$. On se propose de chercher les éléments propres de $A_n(a, b, c,)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A_n(a, b, c)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

1. Montrer que si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, alors $(x_1, \dots, x_n)$ sont les termes de rang variant de 1 à n d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}\,,\; bx_{k+2} + (a-\lambda)a_{k+1} + cx_k = 0$$

2. Rappeler l'expression du terme général de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en fonction des solutions de l'équation

$$bx^2 + (a-\lambda)x + c = 0 \qquad (1)$$

3. À l'aide des conditions imposées à x_0 et x_{n+1}, montrer que (1) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2.
4. Montrer que r_1 et r_2 sont non nuls et que $\frac{r_1}{r_2}$ appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$.
5. En utilisant l'équation (1) satisfaite par r_1 et r_2, déterminer r_1r_2 et $r_1 + r_2$. En déduire qu'il existe un entier $\ell \in [\![1, n]\!]$ et un nombre complexe ρ vérifiant $\rho^2 = bc$ tels que

$$\lambda = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$

6. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout k dans $[\![0, n+1]\!]$, $x_k = 2i\alpha\dfrac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\dfrac{\ell k\pi}{n+1}\right)$.
7. Conclure que $A_n(a, b, c)$ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Fin

Exercice I

1. On voit que le rang est 3, en regardant les colonnes de A dans l'ordre 3,1,2. Ainsi A est inversible et 0 n'est pas une valeur propre de la matrice A.
2. On détermine alors le polynôme caractéristique de A : on a
$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 5 & -2 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 5 & -2 \\ \lambda-1 & \lambda & 0 \\ \lambda-1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & \lambda-5 & 2 \\ 0 & -6 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-1)((\lambda-5)(\lambda+2)+12) = (\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+2) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$$
Ainsi le spectre de A est $\{1,2\}$.
3. On détermine les deux espaces propres $E_1(A)$ et $E_2(A)$. On a
$$AX = 1.X \iff \begin{cases} 3x-5y+2z=0 \\ x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \iff x=y=z$$
et ainsi $E_1(A)$ est la droite vectorielle engendrée par $e_1(1,1,1)$. Aussi
$$AX = 2.X \iff \begin{cases} 2x-5y+2z=0 \\ x-2y=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2y \\ y=2z \end{cases}$$
et ainsi $E_2(A)$ est la droite vectorielle engendrée par $e_3(4,2,1)$.
Donc la somme des dimensions des espaces propres de A vaut 2, en dimension 3 et donc la matrice A n'est pas diagonalisable. Par contre, comme son polynôme caractéristique est scindé, elle est trigonalisable.
4. $E_2(A)$ est une droite et ainsi il existe un unique vecteur e_3 de $E_2(A)$ dont la troisième coordonnée vaut 1, c'est celui choisit ci-dessus : $e_3(4,2,1)$. On a bien sûr $u(e_3)=2e_3$.
5. On pose $B = A - I_3$, d'endomorphisme associé $v = u - \mathrm{id}$. On a
$$B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
6. On détermine le noyau de v. On a
$$BX = 0 \iff \begin{cases} 3x-5y+2z=0 \\ x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \iff x=y=z$$
et ainsi le noyau de B est la droite vectorielle engendrée par $(1,1,1)$, c'est à dire $E_1(A)$.
7. On détermine le noyau de v^2 : on a
$$B^2X = 0 \iff \begin{cases} 4x-8y+4z=0 \\ 2x-4y+2z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \iff x-2y+z=0$$
$$\iff x = 2y-z \iff (x,y,z) = y(2,1,0)+z(-1,0,1)$$
et ainsi le noyau de B^2 est un plan vectoriel de base $((2,1,0),(-1,0,1))$.

8. On pose $e_2 = (1,0,-1)$. D'après la question précédente, $e_2 \in \operatorname{Ker} v^2$ et $e_2 \notin \operatorname{Ker} v$.
9. On pose $e_1 = v(e_2)$. On a donc (matriciellement) $e_1(1,1,1)$. Comme

$$\det(e_1,e_2,e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

la famille (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
10. On a (vectoriellement ici)

$$u(e_2) = v(e_2) + e_2 = e_1 + e_2 \qquad u(e_1) = v(e_1) + e_1 = e_1$$

et ainsi la matrice de u dans (e_1,e_2,e_3) est

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

11. On note P la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1,e_2,e_3). On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Par la méthode du pivot de Gauss, on obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

12. D'après la formule de changement de base, on a $A = PTP^{-1}$ et ainsi, par récurrence sur n, on a $A^n = PT^nP^{-1}$: pour $n = 0$, la formule est vérifiée. Si on a $A^n = PT^nP^{-1}$, alors $A^{n+1} = A.A^n = PTP^{-1}PT^nP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$ ce qui achève la récurrence.
13. Par blocs, nous avons déjà

$$T^n = \begin{pmatrix} K^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec de manière classique (par récurrence par exemple, ou par décomposition avec le binôme)

$$K^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi on a

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

et on en déduit

$$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^n - n - 3 & -8 \cdot 2^n + 3\,n + 8 & 4 \cdot 2^n - 2\,n - 4 \\ 2 \cdot 2^n - n - 2 & -4 \cdot 2^n + 3\,n + 5 & 2 \cdot 2^n - 2\,n - 2 \\ 2^n - n - 1 & -2 \cdot 2^n + 3\,n + 2 & 2^n - 2\,n \end{pmatrix}$$

14. **Application :** on considère l'ensemble E des suite (u_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$$

(a) E est un ensemble de suites solution d'une équation linéaire à coefficients constants d'ordre 3. On sait que E est un espace vectoriel de dimension 3. Le polynôme caractéristique est $X^3 - 4X^2 + 5X - 2$. On remarque qu'il s'agit de $\chi_A = (X-1)^2(X-2)$, de racines 1 et 2. Les suites géométriques solutions de E sont ainsi $(1^n)(=(1))$ et (2^n). Peut-on en déduire une base de E ? Et bien non ! Il nous faudrait une troisième suite solution indépendante (on peut savoir que $(n1^n) = (n)$ convient, mais il s'agit de le découvrir avec ce qui suit).

(b) Pour tout entier n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. On a matriciellement $X_{n+1} = AX_n$.

(c) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout entier n, on a $X_n = A^n X_0$.

(d) Ainsi on a pour tout n entier, en lisant la troisième coordonnée

$$u_n = (2^n - n - 1)u_2 + (-2.2^n + 3n + 2)u_1 + (2^n - 2n)u_0 = (2u_1 - u_2)1^n + (-2u_0 + 3u_1 - u_2)n + (u_0 - 2u_1 + u_2$$

et ainsi la suite (u_n) est combinaison linéaire de (1), (n) et (2^n) qui forment donc une famille génératrice de E, de dimension 3 et donc finalement une base.

(e) La famille $(1), (n), (2^n))$ est donc une base de E.

Exercice II

1. Nous avons un déterminant de Vandermonde, avec ici

$$P(z) = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)$$

2. La formule ci-dessus montre que P est un polynôme en z de degré inférieur à 4. On peut aussi le voir directement en développant le déterminant initial selon la dernière ligne.
3. Justement, le développement selon la dernière ligne, montre que le coefficient de z^3 dans $P(z)$ est

$$- = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix} = -D_4$$

Mais c'est aussi dans l'expression factorisée de $P(z)$

$$-(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$$

puisque

$$(z-a)(z-b)(z-c)(z-d) = z^4 - (a+b+c+d)z^3 + \cdots + abcd$$

Ainsi on a

$$D_4 = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$$

En version *, nous obtenons exactement de la même façon

$$\boxed{D_n = (a_1 + \cdots + a_n) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_k - a_i)}$$

Exercice III

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\Phi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP' \in \mathbb{R}[X]$.
   D'autre part, soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P + \mu Q) &= (X^2-1)(\lambda P + \mu Q)'' + 2X(\lambda P + \mu Q)' \\ &= \lambda[(X^2-1)P'' + 2XP] + \mu[(X^2-1)Q'' + 2XQ'] \\ &= \lambda\Phi(P) + \mu\Phi(Q)\end{aligned}$$

   Ainsi Φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $Q \in \Phi(\mathbb{R}_n[X])$, on peut écrire $Q = \Phi(P)$ avec $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $Q = (X^2-1)P'' + 2XP'$. Or on a

$$\begin{aligned}&\deg(X^2-1)P'') = 2 + \deg(P'') \leqslant 2 + \deg P - 2 = \deg(P) \\ &\deg(2XP') = 1 + \deg(P') \leqslant 1 + \deg(P) - 1 = \deg(P)\end{aligned}$$

   et ainsi $\deg(Q) \leqslant n$ et donc $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. On a donc $\Phi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ ce qui montre que $\mathbb{R}_n[x]$ est stable par l'opérateur Φ.
3. Soit $k \in \{0,\dots,n\}$, on a

$$\Phi(X^k) = (X^2-1)(X^k)'' + 2X(X^k)' = (X^2-1)k(k-1)X^{k-2} + 2kXX^{k-1} = k(k+1)X^k + kX^{k-2}$$

   Ainsi $m_{k,k} = k(k+1)$ et comme $\Phi(X^k)$ combinaison linéaire de $1, X, \dots, X^k$, la matrice M est triangulaire supérieure. On a plus précisément

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

4. On en déduit que le polynôme caractéristique de M, donc de Φ est

$$\chi_M(\lambda) = \prod_{k=0}^{n} (X - k(k+1))$$

   Or la suite $(n(n+1)$ est une suite strictement croissante (somme de (n) et (n^2) strictement croissantes) et ainsi elle prend des valeurs deux à deux distinctes. Ainsi M admet exactement $n+1$ valeurs propres distinctes et comme nous sommes en dimension $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, on peut en déduire que la matrice M est diagonalisable.
5. Soit $k \in \{0,\dots,n\}$, on a

$$(X^2-1)U_k' = (X^2-1)((X^2-1)^k)' = 2kX(X^2-1)(X^2-1)^{k-1} = 2kX(X^2-1)^k = 2kXU_k$$

6. On dérive $k+1$ fois la relation précédente, en appliquant la formule de Leibniz, les fonctions polynomiales étant de classe $\mathcal{C}^\infty$,

$$\begin{aligned}\left[(X^2-1)U_k'\right]^{(k+1)} &= \binom{k+1}{0}(X^2-1)(U_k')^{(k+1)} + \binom{k+1}{1}2X(U_k')^{(k)} + \binom{k+1}{2}2(U_k')^{(k-1)} \\ &= (X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2(k+1)XU_k^{(k+1)} + k(k+1)U_k^{(k)}\end{aligned}$$

et
$$[XU_k]^{(k+1)} = \binom{k+1}{0} XU_k^{(k+1)} + \binom{k+1}{1} U_k^{(k)} = XU_k^{(k+1)} + (k+1)U_k^{(k)}$$
et ainsi en regroupant
$$(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$$

7. D'après la question précédente,
$$\Phi_n(U_k^{(k)}) = (X^2-1)U_l k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} = k(k+1)U_k^{(k)}$$
et ainsi en divisant par $\frac{1}{2^k k!}$,
$$\Phi_n(L_k) = k(k+1)L_k$$
Ainsi L_k est vecteur propre de Φ_n de valeur propre associée $k(k+1)$.
8. Comme $\Phi(L_k) = \Phi_n(L_k) = k(k+1)L_k$, nous obtenons que $k(k+1)$ est une valeur propre de Φ est que L_k est un vecteur propre associé.
Réciproquement, si λ est une valeur propre de Φ, il existe un polynôme non nul P de sorte que $\Phi(P) = \lambda P$.
Si on note n le degré de P, on écrit alors $\Phi(P) = \Phi_n(P) = \lambda P$. Ainsi λ est une valeur propre de Φ_n avec un vecteur propre associé de degré P. D'après la question précédente, il existe alors $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $\lambda = k(k+1)$ avec P colinéaire à L_k, et vu les degrés on a en fait $k = n$ et l'espace propre associé à $n(n+1)$ est la droite engendrée par L_n.

Ainsi, les valeurs propres de Φ sont les $n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$ et l'espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par L_n.

Exercice IV : matrices de Hilbert

1. On a
$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$
On inverse H_2 par la méthode du pivot : on effectue $L_1 \leftarrow 2L_1$ et $L_2 \leftarrow 6L_2$:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$
puis $L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1$:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$$
puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$:
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$$
et pour finir $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$ ce qui permet d'obtenir que H_2 est inversible d'inverse
$$H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$$
On peut aussi utiliser la formule d'inversion en dimension 2 (classique)
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ce qui donne ici

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} = 12 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$$

De même, on inverse H_3 par la méthode du pivot : on effectue $L_1 \leftarrow 6L_1$, $L_2 \leftarrow 12L_2$ et $L_3 \leftarrow 60L_3$

$$\begin{pmatrix} \boxed{6} & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 060 & \end{pmatrix}$$

puis on effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow 3L_3 - 10L_1$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 15 & 16 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \\ -60 & 0 & 180 \end{pmatrix}$$

puis $L_3 \leftarrow L_3 - 15L_2$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$$

puis on effectue $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -54 & 360 & -360 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$$

puis $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 54 & -216 & 180 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$$

et par l'opération $L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1$, on obtient que H_3 est inversible et que

$$H_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$$

On remarque que H_2^{-1} et H_3^{-1} sont à coefficients entiers, ce qui n'était pas du tout évident au départ !

2. Nous avons

$$\Delta_{n+1} = \left| \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \right|$$

On retranche la dernière colonne à toutes les autres, la matrice obtenue garde sa dernière colonne inchangée, avec les termes

$$\frac{1}{n+i}$$

pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$, les termes des colonnes $1, \ldots, n$ devenant

$$\frac{1}{i+j-1} - \frac{1}{n+i} = \frac{n+i-(i+j-1)}{(i+j-1)(n+i)} = \frac{n+1-j}{(i+j-1)(n+i)}$$

On peut alors mettre en facteur $\frac{1}{n+i}$ dans chaque ligne i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$ ainsi que $n+1-j$ dans chaque colonne j, $1 \leqslant j \leqslant n$: ainsi

$$\Delta_{n+1} = \frac{n(n-1)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+n+1)}\Delta'_{n+1} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\Delta'_{n+1}$$

avec Δ'_{n+1} le déterminant de la matrice dont la dernière colonne n'a que des 1 et dont le terme général sur les colonnes j, $1 \leqslant j \leqslant n$ est

$$\frac{1}{i+j-1}$$

On soustrait alors la dernière ligne à toutes les autres dans Δ'_{n+1}, et on développe ensuite selon la dernière colonne, on obtient

$$\Delta'_{n+1} = \left|\left(\frac{1}{i+j-1} - \frac{1}{n+1+j-1}\right)\right| = \left|\left(\frac{n+j-(i+j-1)}{(i+j-1)(n+j)}\right)\right| = \left|\left(\frac{n+1-i}{(i+j-1)(n+j)}\right)\right|$$

et ainsi en factorisant par $n+1-i$ sur les lignes i, $1 \leqslant i \leqslant n$ et par $n+j$ sur les colonnes j, $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$\Delta_{n+1} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!}\Delta_n$$

soit finalement

$$\Delta_{n+1} = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}\Delta_n$$

3. En itérant la formule précédente, on en déduit

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \frac{[(n-1)!]^4[(n-2)!]^4\cdots[2!]^4}{(2n-1)!(2n-2)!(2n-3)!(2n-4)!\cdots 5!4!}\Delta_2 \\
&= \frac{[(n-1)!]^4[(n-2)!]^4\cdots[2!]^4[1!]^4}{(2n-1)!(2n-2)!(2n-3)!(2n-4)!\cdots 5!4!3!2!}\Delta_1 \\
&= \frac{[(n-1)!]^4[(n-2)!]^4\cdots[2!]^4[1!]^4}{(2n-1)!(2n-2)!(2n-3)!(2n-4)!\cdots 5!4!3!2!}
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\Delta_n = \frac{c_n^4}{c_{2n}}$$

que l'on peut aussi prouver par récurrence (une fois l'expression obtenue !).

4. Comme $\Delta_n \neq 0$, la matrice de Hilbert H_n est une matrice inversible. De plus la relation

$$\Delta_{n+1} = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}\Delta_n$$

s'inverse en

$$\Delta_{n+1}^{-1} = \frac{(2n)!(2n+1)!}{(n!)^4}\Delta_n^{-1} = \underbrace{\binom{2n}{n}^2(2n+1)}_{=a_n\in\mathbb{N}}\Delta_n^{-1}$$

Ainsi on passe de Δ_n^{-1} à Δ_{n+1}^{-1} en multipliant par un entier, et $\Delta_1^{-1} = 1$. On en déduit que Δ_n^{-1} est un entier puisque

$$\Delta_n^{-1} = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1$$

Ainsi

$$\det(H_n^{-1}) = \Delta_n^{-1} \in \mathbb{N}$$

Exercice V : Centrale, diagonalisation des matrices tridiagonales

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A_n(a,b,c)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

1. On a $A_n(a,b,c)X = \lambda X$, que l'on transcrit en termes de coefficients, soit

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,,\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \lambda x_i$$

soit encore

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 & = \lambda x_1 \\ cx_1 + ax_2 + bx_3 & = \lambda x_2 \\ & \vdots \\ cx_{n-2} + ax_{n-1} + bx_n & = \lambda x_{n-1} \\ cx_{n-1} + ax_n & = \lambda x_n \end{cases}$$

c'est à dire en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$,

$$\forall k \in \{0,\ldots,n-1\}\,,\ cx_k + ax_{k+1} + bx_{k+2} = \lambda x_{k+1}$$

soit encore

$$\forall k \in \{0,\ldots,n-1\}\,,\ cx_k + (a-\lambda)x_{k+1} + bx_{k+2} = 0$$

et ainsi $(x_1,\ldots,x_n)$ sont les termes de rang variant de 1 à n d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}\,,\ bx_{k+2} + (a-\lambda)a_{k+1} + cx_k = 0$$

2. La suite (x_k) est alors solution d'une relation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, d'équation caractéristique $bx^2 + (a-\lambda)x + c = 0$, avec on le rappelle $bc \neq 0$. Lorsque le discriminant est non nul, si r et s sont les racines distinctes du polynôme caractéristique, alors l'espace des solutions est $\mathrm{Vect}((r^n),(s^n)$. Lorsque le discriminant est nul, r la racine double, l'espace des solutions est $\mathrm{Vect}((r^n),(nr^n))$.

3. Si nous étions dans le cas d'un discriminant nul, notons r la racine double, on aurait l'existence de α et β des complexes de sorte que

$$\forall k \in \mathbb{N}\,,\ x_k = \alpha r^k + \beta k r^k$$

Les conditions $x_0 = x_{n+1} = 0$ impliqueraient alors que

$$x_0 = 0 = \alpha \qquad x_{n+1} = 0 = \alpha r^{n+1} + \beta(n+1)r^{n+1}$$

soit encore $\alpha = 0$ et $(n+1)\beta r^{n+1} = 0$, et comme $r \neq 0$ (sinon au aurait $c = 0$), $\beta = 0$. Alors la suite (x_k) serait la suite nulle, ce qui est exclu car sinon on aurait le vecteur propre X nul. Ainsi le discriminant est non nul, et nous avons deux racines distinctes r_1 et r_2.

4. Les racines r_1 et r_2 sont non nulles puisque $c \neq 0$. Il existe α et β des complexes de sorte que

$$\forall k \in \mathbb{N}\,,\ x_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k$$

Les conditions $x_0 = x_{n+1} = 0$ impliquent alors que

$$x_0 = 0 = \alpha + \beta \qquad x_{n+1} = 0 = \alpha r_1^{n+1} + \beta r_2^{n+1}$$

soit encore $\beta = -\alpha$ et $\alpha\left(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}\right) = 0$. On a $\alpha \neq 0$ puisque $X \neq 0$ et ainsi $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$ soit $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = 1$ ce qui signifie que $\frac{r_1}{r_2}$ appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$.

5. On a $r_1 r_2 = \frac{c}{b}$ et $r_1 + r_2 = \frac{\lambda - a}{b}$ (somme et produit des racines d'une équation de degré 2). On écrit $\frac{r_1}{r_2} = \mathrm{e}^{\frac{2i\ell\pi}{n+1}}$ avec $\ell \in \{0, \dots n\}$; $\ell = 0$ imposerait $r_1 = r_2$, ce qui est exclu et ainsi $\ell \in [\![1, n]\!]$. On a
$$\lambda = a + b(r_1 + r_2) = a + br_2 \left(1 + \mathrm{e}^{\frac{2i\ell\pi}{n+1}}\right) = a + 2\underbrace{br_2 \mathrm{e}^{\frac{i\ell\pi}{n+1}}}_{=\rho} \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$
avec
$$\rho^2 = b^2 r_2^2 \mathrm{e}^{\frac{2i\ell\pi}{n+1}} = b^2 r_2^2 \frac{r_1}{r_2} = b^2 r_1 r_2 = bc$$
et donc
$$\lambda = a + 2\rho \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$
avec $\rho^2 = bc$, $\ell \in [\![1, n]\!]$.
6. Alors avec la constante α de la question 4.,
$$x_k = \alpha\left(r_1^k - r_2^k\right) = \alpha r_2^k \left(\mathrm{e}^{\frac{2ik\ell\pi}{n+1}} - 1\right) = 2i\alpha r_2^k \mathrm{e}^{\frac{ik\ell\pi}{n+1}} \sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right) = 2i\alpha \frac{\rho^k}{b^k} \sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$$
7. L'étude faite dans les questions ci-dessus est essentiellement de type analyse. On obtient que si λ est une valeur propre, alors il existe $\ell \in [\![1, n]\!]$ et ρ un complexe non nul, $\rho^2 = bc$, tels que
$$\lambda = a + 2\rho \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) = \lambda_\ell$$
et X colinéaire à
$$X_\ell = \left(2i\frac{\rho^k}{b^k} \sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)\right)_{1 \leqslant k \leqslant n} \neq 0$$
Réciproquement, les calculs se remontent sans difficultés, et nous obtenons que les valeurs λ_ℓ, $\ell \in [\![1, n]\!]$ sont des valeurs propres, et comme $\frac{\ell\pi}{n+1} \in [0, \pi]$, nous obtenons n valeurs propres distinctes. Ainsi $A_n(a, b, c)$ est diagonalisable et son spectre est l'ensemble des n valeurs distinctes
$$a + 2\rho \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$
avec $\ell \in \{1, \dots, n\}$, et d'espaces propres associés les droites engendrées par X_ℓ.