Devoir surveillé n°6
3 heures

Exercice I

On considère une variable aléatoire N, à valeur dans $\mathbb{N}$, telle que il existe un réel $a < 1$ et un réel b de sorte que : $\mathbb{P}(N = 0) \neq 1$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \, , \, \mathbb{P}(N = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}(N = k - 1).$$

On dit que N suit une loi de Panjer. On note $p_k = \mathbb{P}(N = k)$ de sorte que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \, , \, p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}.$$

On suppose de plus que $0 < a < 1$ et $\frac{b}{a} > 0$. On pose $\alpha = -\frac{a+b}{a}$. On pose aussi f la fonction

$$\forall x \in [0, 1] \, , \, f(x) = p_0(1 - ax)^{\alpha}.$$

1. Montrer que pour tout entier k, sur $[0, 1]$, $f^{(k)}(x) = k!p_k(1 - ax)^{\alpha - k}$.
2. En déduire, à l'aide de la formule de Lagrange avec reste intégral que pour tout entier n,
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k + (n + 1)p_{n+1} \int_0^x (1 - at)^{\alpha - n - 1}(x - t)^n \mathrm{d}t.$$
3. Vérifier que pour tout $t \in [0, x]$, $\frac{x-t}{1-at} \leqslant 1$ puis montrer que pour tout entier n,
$$0 \leqslant \int_0^x (1 - at)^{\alpha - n - 1}(x - t)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (1 - at)^{\alpha - 1} \mathrm{d}t.$$
4. Montrer que $\frac{(n+1)p_{n+1}}{np_n} \longrightarrow a$. Que peut-on en déduire ?
5. En déduire que la fonction génératrice G_N de N vérifie $G(x) = p_0(1 - ax)^{\alpha}$.
6. En calculant $G(1)$, exprimer p_0 à l'aide de a, b et α.
7. La variable aléatoire N admet-elle une espérance finie ? Si oui, quelle est sa valeur ?
8. En montrant directement que si $m \geqslant 1$,
$$\sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(N = k) = a \sum_{k=0}^{m-1} (k + 1)\mathbb{P}(N = k) + b \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(N = k)$$
retrouver le résultat précédent.

Exercice II

Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2, c'est à dire telle que X^2 est d'espérance finie. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes discrètes réelles de même loi que X et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \geqslant 1$.

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Montrer que si $\delta > 0$, et $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X)| \geqslant n\delta) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{n\delta^2}$$
3. Soit u et v deux réels de sorte que $u < \mathbb{E}(X) < v$, on pose $\delta = \min(v - \mathbb{E}(X), \mathbb{E}(X) - u)$.
   (a) Montrer que $(nu < S_n < nv) \supset (|S_n - n\mathbb{E}(X)| < n\delta)$. On pourra s'aider d'un dessin.
   (b) En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\mathbb{P}(nu \leqslant S_n \leqslant nv)$.

Exercice III

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et mutuellement indépendantes. On admet que dans ce cas, pour tout $n \geqslant 2$, $X_1 + \cdots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes (lemme des coalitions)
On suppose de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre 1.
On rappelle que si X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et qui suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $S_n^* = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

1. (a) Montrer que S_n suit une loi de Poisson de paramètre n et en déduire son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de S_n^*.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0) = e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \dfrac{n^k}{k!}$.
2. Soient $r \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$. On rappelle que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{r+1}$ sur I, alors on a :
$$f(b) = \sum_{k=0}^{r} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(r+1)}(t)\frac{(b-t)^r}{r!}\mathrm{d}t.$$
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$e^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} + \int_0^n \frac{e^{n-t}t^n}{n!}\mathrm{d}t.$$
3. (a) Montrer que $\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0) = 1 - \displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-t}t^n}{n!}\mathrm{d}t$.
   (b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0) - \mathbf{P}(S_{n+1}^* \leqslant 0) = \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t - e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(c) En déduire que la suite $(\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante qui converge vers une limite $\ell \in [0,1[$. On pourra étudier $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^+$.

(d) Proposer une méthode numérique et une méthode probabiliste pour conjecturer la valeur de ℓ. Quels sont les avantages et les inconvénients respectifs de ces deux méthodes ?

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbf{G}_{S_n}$ la fonction génératrice de S_n. On rappelle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{G}_{S_n}(t) = \mathbf{E}(t^{S_n}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = k)t^k.$$

(a) Donner, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, une expression simple de $\mathbf{G}_{S_n}(t)$.

(b) Vérifier que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, $t^{S_n^*}$ admet une espérance, notée $\mathbf{E}(t^{S_n^*})$, et que :

$$\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}}.$$

(c) Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\mathbf{E}(t^{S_n^*})\right)$.

Fin

Exercice I

On considère une variable aléatoire N, à valeur dans $\mathbb{N}$, telle que il existe un réel $a<1$ et un réel b de sorte que : $\mathbb{P}(N=0)\neq 1$ et

$$\forall k\in\mathbb{N}^*\,,\ \mathbb{P}(N=k)=\left(a+\frac{b}{k}\right)\mathbb{P}(N=k-1).$$

On dit que N suit une loi de Panjer. On note $p_k=\mathbb{P}(N=k)$ de sorte que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*\,,\ p_k=\left(a+\frac{b}{k}\right)p_{k-1}.$$

On suppose de plus que $0<a<1$ et $\frac{b}{a}>0$. On pose $\alpha=-\frac{a+b}{a}$. On pose aussi f la fonction

$$\forall x\in[0,1]\,,\ f(x)=p_0(1-ax)^\alpha.$$

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^infty$ sur $[0,1]$ puisque $1-ax>0$ sur $[0,1]$ avec $f()=p_0\mathrm{e}^{\alpha\ln(1-ax)}$ d'où le résultat par composée.
   On procède par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$.
   Pour $k=0$, si $x\in[0,1]$, $f^{(0)}(x)=f(x)=p_0(1-ax)^\alpha=0!p_0(1-ax)^{\alpha-0}$.
   On suppose que sur $[0,1]$, $f^{(k)}(x)=k!p_k(1-ax)^{\alpha-k}$. Alors en dérivant
   $$f^{(k+1)}(x)=k!p_k(\alpha-k)(-a)(1-ax)^{\alpha-k-1}=k!p_k(a+b+ka)(1-ax)^{\alpha-k-1}=(k+1)!p_{k+1}(1-ax)^{\alpha-k-1}$$
   ce qui achève la récurrence. Ainsi, pour tout entier k, sur $[0,1]$, $f^{(k)}(x)=k!p_k(1-ax)^{\alpha-k}$.
2. On applique la formule de Taylor avec reste intégral sur $[0,x]$, à l'ordre n,
   $$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{n}p_kx^k+(n+1)p_{n+1}\int_0^x(1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
3. Soit $t\in[0,x]$, on a
   $$\frac{x-t}{1-at}\leqslant 1\iff x-t\leqslant 1-at\iff t(a-1)\leqslant 1-x$$
   ce qui est vrai puisque $t(a-1)\leqslant 0\leqslant 1-x$.
   Ainsi, pour tout $t\in[0,x]$, $0\leqslant\frac{x-t}{1-at}\leqslant 1$.
   Soit alors n entier, on a
   $$0\leqslant\int_0^x(1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\underbrace{\frac{x-t}{1-at}}_{\substack{\leqslant 1\\ \geqslant 0}}\right)^n(1-at)^{\alpha-1}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x(1-at)^{\alpha-1}\mathrm{d}t.$$

4. On a
$$\frac{(n+1)p_{n+1}}{np_n} = \frac{(n+1)\left(a+\frac{b}{n+1}\right)p_n}{np_n} = \frac{(n+1)\left(a+\frac{b}{n+1}\right)}{n} \sim a$$
et donc $\frac{(n+1)p_{n+1}}{np_n} \longrightarrow a$. On peut en déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} np_n$ est convergente (absolument convergente), que la famille (np_n) est sommable que np_n tend vers 0, que N admet une espérance finie.
5. En déduire que la fonction génératrice G_N de N vérifie $G(x) = p_0(1-ax)^\alpha$.

6. On a $1 = G(1) = p_0(1-a)^\alpha$, et ainsi $p_0 = (1-a)^{-\alpha} = (1-a)^{1+\frac{b}{a}}$.
7. On a déjà vu que la variable aléatoire N admet-elle une espérance finie. On sait alors G dérivable en 1 et que $\mathbb{E}(N) = G'(1)$.
Si ça n'est pas encore vu, on peut aussi invoquer le fait que G est dérivable en 1 et que donc N admet une espérance finie avec $\mathbb{E}(N) = G'(1)$. On a
$$\mathbb{E}(N) = G'(1) = p_0(-a)\alpha(1-a)^{\alpha-1} = \frac{a+b}{1-a}$$

8. Soit $m \geqslant 1$,
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m k\mathbb{P}(N=k) = \sum_{k=1}^m kp_k &= \sum_{k=1}^m (ka+b)p_{k-1}\\ &= a\sum_{k=1}^m kp_{k-1} + b\sum_{k=1}^m p_{k-1}\\ &= a\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\mathbb{P}(N=k) + b\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}(N=k)\end{aligned}$$
Ainsi
$$\sum_{k=1}^m kp_k = a\sum_{k=0}^{m-1} kp_k + a\sum_{k=0}^{m-1} p_k + b\sum_{k=0}^{m-1} p_k$$
d'où
$$(1-a)\sum_{k=1}^m kp_k = -a\underbrace{mp_m}_{\longrightarrow 0} + (a+b)\underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} p_k}_{\longrightarrow 1} \longrightarrow a+b$$
et ainsi (np_n) sommable avec
$$\sum_{n=0}^{+\infty} np_n = \frac{a+b}{1-a}$$

Exercice II

1. Si X et de carré d'espérance finie, alors pour tout$\varepsilon > 0$, on a
$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

2. Soit $\delta > 0$, et $n \in \mathbb{N}^*$, on a par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(X)$$

et par indépendances $\mathbb{V}(S_n) = n\mathbb{V}(X)$. Ainsi en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire S_n et à la précision $\varepsilon = n\delta > 0$, on obtient

$$\mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X)| \geqslant n\delta) \leqslant \frac{nV(X)}{(n\delta)^2} = \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

3. Cela «se voit sur un dessin». Précisément, si $|S_n - n\mathbb{E}(X)| < n\delta$, alors

$$-n\delta < S_n - n\mathbb{E}(X) < n\delta$$

et ainsi

$$-n\delta + n\mathbb{E}(X) < S_n < n\delta + n\mathbb{E}(X)$$

soit encore

$$n(\mathbb{E}(X) - \delta) < S_n < n(\mathbb{E}(X) + \delta)$$

Or $\delta \leqslant v - \mathbb{E}(X)$ et ainsi $\mathbb{E}(X) + \delta \leqslant v$ et $\delta \leqslant \mathbb{E}(X) - u$ et ainsi $u \leqslant \mathbb{E}(X) - \delta$ et donc finalement on a bien

$$nu < S_n < nv$$

Ainsi $(|S_n - n\mathbb{E}(X)| < n\delta) \subset (nu \leqslant S_n \leqslant nv)$ et donc

$$\mathbb{P}((|S_n - n\mathbb{E}(X)| < n\delta) \leqslant \mathbb{P}(nu \leqslant S_n \leqslant nv)$$

Avec la question précédente, on a

$$1 \geqslant \mathbb{P}(nu \leqslant S_n \leqslant nv) \geqslant \mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X)| < n\delta) = 1 - \mathbb{P}((|S_n - n\mathbb{E}(X)| \geqslant n\delta) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{n\delta^2}$$

et donc par encadrement, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(nu \leqslant S_n \leqslant nv) = 1$$

Exercice III

1. (a) On procède par récurrence sur $n \geqslant 1$. On considère la propriété : « S_n suit une loi de Poisson de paramètre n », pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   Pour $n = 1$, cela est vrai par hypothèse.
   (Pour $n = 2$, on sait que X_1 et X_2, indépendantes, suivent des lois de Poisson de paramètre 1, et ainsi d'après le cours, $X_1 + X_2 = S_2$ suit une loi de Poisson de paramètre la somme des paramètres, soit 2.)

   On suppose la propriété vraie au rang n, avec $n \geqslant 1$ fixé. Alors $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, avec S_n et X_{n+1} indépendantes (admis par l'énoncé, propriété du lemme des coalitions), suivant des lois de Poisson de paramètre respectivement n par hypothèse de récurrence et 1, et ainsi S_{n+1} suit une loi de Poisson de paramètre la somme des paramètres, soit $n + 1$, ce qui achève la récurrence.

   On a alors

$$E(S_n) = V(S_n) = n$$

(b) La variable aléatoire S_n^* est la variable aléatoire centrée réduite associée à la variable aléatoire S_n. On a par linéarité de l'espérance

$$E(S_n^*) = \frac{1}{\sqrt{n}}(E(S_n) - n) = 0$$

et par propriété de la variance (formule $V(aX+b) = a^2V(X)$, X admettant une variance)

$$V(S_n^*) = \frac{1}{n}V(S_n) = 1$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(S_n^* \leqslant 0) = P(S_n \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-n}\frac{n^k}{k!} = \mathrm{e}^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$$

2. L'énoncé rappelle la formule de Taylor avec reste intégral. On applique cette formule à la fonction exponentielle, sur le segment $[0, n]$, à l'ordre n, la fonction exponentielle étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, les dérivée de l'exponentielle en 0 étant toutes égales à 1 :

$$\mathrm{e}^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} + \int_0^n \frac{(n-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$

On effectue alors dans l'intégrale le changement de variable $u = n - t$, ce qui donne

$$\mathrm{e}^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} + \int_n^0 \frac{u^n}{n!}\mathrm{e}^{n-u}(-\mathrm{d}u)$$

soit finalement

$$\mathrm{e}^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} + \int_0^n \frac{u^n}{n!}\mathrm{e}^{n-u}\mathrm{d}u$$

3. (a) On a

$$P(S_n^* \leqslant 0) = \mathrm{e}^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$$

et ainsi en utilisant la question précédente

$$P(S_n^* \leqslant 0) = \mathrm{e}^{-n}\left(\mathrm{e}^n - \int_0^n \frac{\mathrm{e}^{n-t}t^n}{n!}\mathrm{d}t\right) = 1 - \int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-t}t^n}{n!}\mathrm{d}t$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a en intégrant par partie la seconde intégrale (on se débrouille pour avoir t^{n+1} dans les deux intégrales)

$$\begin{aligned}
P(S_n^* \leqslant 0) - P(S_{n+1}^* \leqslant 0) &= 1 - \int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-t}t^n}{n!}\mathrm{d}t - \left(1 - \int_0^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-t}t^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t\right) \\
&= \int_0^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-t}t^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t - \int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-t}t^n}{n!}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-t}t^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t - \left[\mathrm{e}^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^n + \int_0^n -\mathrm{e}^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t \\
&= -\mathrm{e}^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!} + \int_n^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-t}t^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

(c) On considère la fonction f définie que $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(t) = \mathrm{e}^{-t} t^{n+1}$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme produit de fonctions élémentaires de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on a

$$f'(t) = -\mathrm{e}^{-t} t^{n+1} + (n+1)\mathrm{e}^{-t} t^n = \mathrm{e}^{-t}(n+1-t)t^n$$

On en déduit les variations de la fonction f :

t	0		$n+1$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(n+1)$	$\searrow$	0

Pour $t \in [n, n+1]$, on a donc $\mathrm{e}^{-t} t^{n+1} \geqslant \mathrm{e}^{-n} n^{n+1}$, et ainsi

$$\int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-t} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{d}t \geqslant \frac{\mathrm{e}^{-n} n^{n+1}}{(n+1)!}$$

ce qui permet d'en déduire que $P(S_n^* \leqslant 0) - P(S_{n+1}^* \leqslant 0) \geqslant 0$ et ainsi la suite $(P(S_n^* \leqslant 0))$ est une suite décroissante. Comme elle est positive (probabilités), elle converge donc, vers une limite ℓ avec $\ell \geqslant 0$. Comme $P(S_1^* \leqslant 0) = P(X_1 \leqslant 0) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$, on a donc $\ell \in [0, 1[$.

(d) **Méthode numérique :** on utilise la formule $P(S_n^* \leqslant 0) = \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$, en prenant n « grand ». La méthode est rapide, mais n'avons pas d'estimation de l'erreur d'approximation (étude à faire !). De plus, si la suite $(P(S_n^* \leqslant 0))$ décroît très lentement, il se peut qu'elle stagne numériquement (lorsque la précision de la machine est atteinte) sans que l'on soit proche de la limite.

```
import numpy as np

def P(n):
    l = [n ** k / np.math.factorial(k) for k in range(0,n+1)]
    return sum(l) * np.exp(-n)

print(P(600))

0.510855521626
```

Méthode probabiliste : On simule la loi de Poisson de paramètre 1 par la loi binomiale $\mathcal{B}\left(N, \frac{1}{N}\right)$ avec N grand, que l'on répète n fois pour simuler la loi de Poisson de paramètre n. On peut alors estimer

$$P(S_n^* \leqslant 0) = P(S_n \leqslant 0)$$

avec un grand nombre de réalisation :

```python
import random as r

def binomiale(n, a):
    s = 0
    for k in range(n):
        x = r.random()
        if x <= a:
            s += 1
    return s

def poisson(n):
    s = 0
    for i in range(n):
        x = binomiale(n, 1 / n)
        s += x
    return s

def P(n, Ne):
    s = 0
    for i in range(Ne):
        x = poisson(n)
        if x <= n: # succès pour la probabilité cherchée
            s += 1
    return s / Ne

print(P(500,1000))

0.513
```

La méthode probabiliste est lente et nous n'avons aucune information (il faudrait faire une étude poussée, et on obtiendrait seulement une précision sous condition probabiliste) sur la précision obtenue.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, comme S_n suit la loi de Poisson de paramètre n, on a (résultat de cours que l'on redémontre)

$$G_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n} \frac{n^k}{k!} t^k = \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nt)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-n} \mathrm{e}^{nt} = \mathrm{e}^{n(t-1)}$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire $t^{S_n^*} = t^{\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}}$. On envisage alors la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n = k) t^{\frac{k-n}{\sqrt{n}}}$. Or on a

$$P(S_n = k) t^{\frac{k-n}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{t^{\sqrt{n}}} P(S_n = k) \left[t^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \right]^k$$

avec $t^{\frac{1}{\sqrt{n}}} > 0$, et on reconnaît ainsi le terme général de $\dfrac{1}{t^{\sqrt{n}}} G_{S_n}\left(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \right)$ ce qui nous assure de la convergence absolue de la série, la série génératrice de S_n étant de rayon infini. On obtient alors le résultat d'après la formule de transfert.

(c) Soit $t > 0$, lorsque n tend vers $+\infty$, on écrit en utilisant 4.a.

$$E\left(t^{S_n^*}\right) = \frac{\mathrm{e}^{n(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)}}{t^{\sqrt{n}}}$$

Or

$$t^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}\ln t} = 1 + \frac{\ln t}{\sqrt{n}} + \frac{\ln^2 t}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

puis

$$n(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1) = \ln t\sqrt{n} + \frac{\ln^2 t}{2} + \mathrm{o}(1)$$

et ainsi

$$E(t^{S_n^*}) = \frac{1}{t^{\sqrt{n}}}\mathrm{e}^{\ln t\sqrt{n}+\frac{\ln^2 t}{2}+\mathrm{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\frac{\ln^2 t}{2}}$$