Quinzaine 10 du 11/03 au 22/03

Chapitre 6 : *Intégration*
★ Programme de première année (rappels) :
L'objectif majeur de ce chapitre est de définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs réelles ou complexes et d'en établir les propriétés élémentaires, notamment le lien entre intégration et primitivation. Il permet ainsi d'achever la justification des propriétés présentées au premier semestre.
Ce chapitre permet également de consolider la pratique des techniques usuelles de calcul intégral.

Fonctions en escalier. Subdivision d'un segment. Fonctions en escalier définies sur un segment à valeurs réelles.
Intégrale d'une fonction continue sur un segment. Intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Aucune construction n'est imposée.
Les fonctions continues par morceaux sont hors programme.
Il convient d'interpréter graphiquement l'intégrale d'une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ en terme d'aire mais tout développement théorique sur ce sujet est hors programme.
$\leftrightarrows$ PC et SI : valeur moyenne.
Notation $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, $\int_a^b f$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.
Inégalité : $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$.
Les étudiants doivent savoir majorer et minorer des intégrales. Relation de Chasles. Extension de la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
Sommes de Riemann. Si f est une fonction continue sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Interprétation géométrique des sommes de Riemann. Démonstration dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$.
$\leftrightarrows$ I : méthodes des rectangles, des trapèzes.
Calcul intégral. Si f est une fonction continue sur l'intervalle I et si x_0 est un point de I, alors $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en x_0.
Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.
Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.
Pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$$

Intégration par parties. Changement de variable. Application au calcul de primitives. Tout excès de technicité est exclu. Les méthodes d'intégration des fractions rationnelles en cosinus ou sinus, celles des fonctions homographiques ou de polynômes du second degré sont hors programme.
Formule de Taylor avec reste intégral. Pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n.

Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes.
Intégrale d'une fonction continue sur un segment, linéarité, majoration du module de l'intégrale, intégration par parties et changement de variable, formule de Taylor avec reste intégral. Définition au moyen des parties réelle et imaginaire.
Techniques fondamentales de calculs en analyse : PCSI début d'année.
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles.
Les étudiants doivent savoir utiliser les primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour calculer celles de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
$\leftrightarrows$ PC et SI : cinématique.
Primitives des fonctions puissances, cosinus, sinus, tangente, exponentielle, logarithme,

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}\,,\ x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$$

Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type

$$x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$$

et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ où f est continue.
Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. Résultat admis à ce stade.
Intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
Changement de variable : si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors pour tout a et b dans I

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

On définit à cette occasion la classe $\mathcal{C}^1$. Application au calcul de primitives.

★ Programme de seconde année :
Cette section vise les objectifs suivants :
- étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées ;
- définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable ;
- compléter la section dédiée aux suites et aux séries de fonctions par les théorèmes de convergence dominée et d'intégration terme à terme ;
- étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant dun paramètre.
On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des résultats utilisés. De même, dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable dintégration.
Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, ensemble des nombres réels ou des nombres complexes.

Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux : brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année.

Intégrales généralisées sur $[a,+\infty[$: si f est une application à valeur complexes continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Si tel est la cas, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ cette limite.

Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée. Intégrale divergente. Intégrales généralisée sur un intervalle quelconque : adaptation du paragraphe précédent aux fonction continues par morceaux définies sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert de $\mathbb{R}$. Notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Intégrales de référence : $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 t^{-\alpha}\mathrm{d}t$ (*).

Intégrales $\displaystyle\int_a^b (t-a)^{-\alpha}\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^b (b-t)^{-\alpha}\mathrm{d}t$.

Les étudiants doivent connaître la nature de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ selon le signe de α (*).
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
Changement de variable : si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ et $f :]a,b[\to \mathbb{C}$ est continue par morceaux alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$ et convergente si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente et, si tel est le cas, elles sont égales.
Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$. L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Notation $[fg]_a^b$.
Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ (*).

Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables.
La convergence absolue implique la convergence et dans ce cas la valeur absolue (ou le module) de l'intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue (ou du module).
Pour une fonction à valeurs réelles, on utilise ses parties positives et négative.

Une fonction continue par morceaux sur un intervalle I est dite intégrable sur I si son intégrale sur I est absolument convergente. Notations $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_I f$.

Pour f et g fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$:
– si $|f| \leqslant |g|$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a,+\infty[$.
– si $f(x) \underset{x\to\infty}{=} \mathrm{O}(g(x))$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a,+\infty[$.
– si $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g sur $[a,+\infty[$.

Si f est continue et intégrable sur I, alors $\displaystyle\int_I |f(t)|\mathrm{d}t = 0$ implique $f = 0$.
Espace vectoriel $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux intégrables sur I.
Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.

Suites et séries de fonctions intégrables.
Théorème de convergence dominée :
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions (f_n) et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration hors programme.
L'hypothèse de continuité par morceaux de f, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Théorème d'intégration terme à terme :
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrales sur I, telle que que la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge, alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration hors programme.
L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |f_n|$.
Intégrales à paramètre.
Théorème de continuité :
Si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que : – pour tout $t \in I$,

$$x \mapsto f(x,t)$$

est continue sur A ;
– pour tout x de A,

$$t \mapsto f(x,t)$$

est continue par morceaux sur I ;
– il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait

$$|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.
Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de A ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de convergence dominée à paramètre continu :
Si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que :
– pour tout $t \in I$,

$$f(x,t) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell(t)$$

– pour tout x de A,

$$t \mapsto f(x,t) \qquad t \mapsto \ell(t)$$

sont continue par morceaux sur I ;
– il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait

$$|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

alors la fonction $t \mapsto \ell(t)$ est intégrable sur I et

$$\int_I f(x,t)\mathrm{d}t \underset{x \to a}{\longrightarrow} \int_I \ell(t)\mathrm{d}t$$

Théorème de dérivation : Si A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :
– pour tout $t \in I$,

$$x \mapsto f(x,t)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
– pour tout x de A,

$$t \mapsto f(x,t)$$

est continue par morceaux sur I et intégrable sur I ;
– pour tout x de A,

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$$

est continue par morceaux sur I ;
– il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \varphi(t)$$

alors la fonction g définie par

$$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et on a sur A

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, sous hypothèse de domination de $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t$. et d'intégrabilité des $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\mathrm{d}t$ pour $0 \leqslant j < k$.
Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de A ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Questions de cours :

- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.