Devoir n°6

$$\boxed{\text{Calcul de } \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.}$$

On pose pour $n \geqslant 1$ et $t \in [0, +\infty[$, $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. Représenter f, ainsi que f_1, f_2 et f_3 et même d'autres encore, sur le même graphique.
3. Soit $t \in [0, +\infty[$, montrer qu'il existe un rang N_0 à partir duquel $t \in [0, \sqrt{n}]$. Que vaut alors $f_n(t)$?
   En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonctions f sur $[0, +\infty[$.
4. On rappelle que $\ln(1 + u) \leqslant u$ si $u > -1$. Montrer que
   $$\forall t \in [0, +\infty[\,,\ 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$$
5. En déduire que
   $$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$
6. On pose $t = \sqrt{n}\cos u = \varphi(u)$. Vérifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective, strictement décroissante de $]0, \pi/2[$ sur $]0, \sqrt{n}[$. En déduire que pour $n \geqslant 1$, on a
   $$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u)\mathrm{d}u = \sqrt{n}W_{2n+1}.$$
   avec W_n l'intégrale dite de Wallis.
7. On rappelle que (c'est tout une partie de problème si on voulait ...)
   $$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$
   Montrer que
   $$\sqrt{n}W_{2n+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
   et en déduire que
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

8. On pose si $n \geqslant 0$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

   (a) Montrer que l'intégrale généralisée I_n converge pour tout entier n.

   (b) Déterminer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$. On utilisera une primitive.

   (c) Établir que pour tout entier n avec $n \geqslant 2$,

$$I_n = \frac{n-1}{2} I_{n-2}$$

   On procédera par une intégration par parties généralisée.

   (d) En déduire que pour tout $n \geqslant 0$,

$$I_{2n+1} = \frac{n!}{2} \qquad I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n!} \sqrt{\pi}.$$

9. Toto a malheureusement oublié le théorème de convergence dominée, et il ne se contente pas de la minoration de f par les fonctions f_n, il cherche aussi une majoration.

   (a) Montrer que si $t \geqslant 0$,

$$\mathrm{e}^t \geqslant 1 + t$$

   (b) En déduire que $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-t} \leqslant \frac{1}{1+t}$ puis que si $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{e}^{-t} = \left(\mathrm{e}^{\frac{-t}{n}}\right)^n \leqslant \left(\frac{1}{1+\frac{t}{n}}\right)^n$$

   (c) En déduire que si $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

   (d) Par le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(u)$, montrer que si $A > 0$,

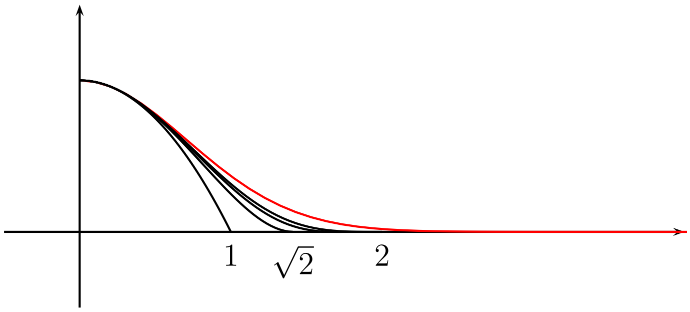
$$\int_0^A \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(u) \mathrm{d}u = \sqrt{n} W_{2n-2}$$

   On rappelle que $1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$.

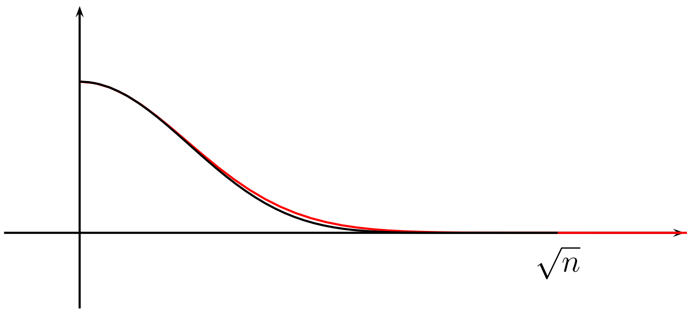
   (e) Conclure.

Devoir n°6 : correction

1. La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$, et nous avons
$$t^2 f(t) = t^2 \mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
et ainsi $f(t) = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ce qui assure l'intégrabilité de f en $+\infty$. Donc f est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. On représente f ainsi que quelques fonctions f_n :



et de manière générale, f_n (ici f_{10}) :



3. Soit $t \in [0,+\infty[$, à partir du rang $N_0 = E(t^2)+1$ nous avons si $n \geqslant N_0$, $n \geqslant t^2$ et ainsi $t \in [0,\sqrt{n}]$, et alors $f_n(t) = \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n$. Or
$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)}$$
et comme $\ln(1+u) \sim_0 u$,
$$n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \sim n \times \left(-\frac{t^2}{n}\right) = -t^2$$
et donc nous avons
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \mathrm{e}^{-t^2} = f(t).$$
On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonctions f sur $[0,+\infty[$.
4. Soit $t \in [0,+\infty[$, – si $t \geqslant \sqrt{n}$, $f_n(t) = 0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$
– si $t \in [0,\sqrt{n}]$, on a puisque $\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \leqslant -\frac{t^2}{n}$,
$$0 \leqslant f_n(t) = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)} \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$$
Ainsi
$$\forall t \in [0,+\infty[\,,\ 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} = \varphi(t)$$
avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$.

5. Les conditions sont donc réunies pour appliquer le théorème de convergences dominée, et nous avons ainsi
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$
6. On pose $t = \sqrt{n}\cos u = \varphi(u)$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective, strictement décroissante de $]0,\pi/2[$ sur $]0,\sqrt{n}[$ vu la connaissance de la fonction cosinus. Ainsi pour $n \geqslant 1$, sachant que
$$\mathrm{d}t = \sqrt{n}(-\sin(u))\mathrm{d}u$$
on a
$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2(u)\right)^n (-\sin(u))\mathrm{d}u \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u)\mathrm{d}u = \sqrt{n}W_{2n+1}.\end{aligned}$$
avec W_n l'intégrale dite de Wallis.
7. On rappelle que
$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$
et on obtient
$$\sqrt{n}W_{2n+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
et donc finalement
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$
puis par parité
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$
8. On pose si $n \geqslant 0$,
$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$
   (a) La fonction $t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, et on a
$$t^2.t^n\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   et ainsi $t^n\mathrm{e}^{-t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ce qui assure l'intégrabilité en $+\infty$. Ainsi l'intégrale est bien absolument convergente, donc convergente. Donc l'intégrale généralisée I_n converge pour tout entier n.
   (b) Nous avons
$$\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$
   ou de manière moins abusive,
$$\int_0^{A} t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\right]_0^{A} = \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-A^2}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

(c) Soit $n \geqslant 2$, nous avons, l'intégration par parties généralisée étant licite,

$$\begin{aligned} I_n \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{2} \times 2t\mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\left[-\frac{t^{n-1}}{2} \mathrm{e}^{-t^2} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{n-1}{2} \int_0^{+\infty} t^{n-2} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \\ &= \frac{n-1}{2} I_{n-2} \end{aligned}$$

Ainsi pour tout entier n avec $n \geqslant 2$,

$$I_n = \frac{n-1}{2} I_{n-2}$$

(d) Ainsi, de manière classique, nous avons

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2} \times \frac{2n-3}{2} \cdots \times I_2 = \frac{2n-1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} I_0 \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n!} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{2n}{2} \times \frac{2n-2}{2} \cdots \times I_3 = \frac{2n}{2} \times \cdots \times \frac{2}{2} I_1 \\ &= n \times (n-1) \cdots 1 \times \frac{1}{2} = \frac{n!}{2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$I_{2n+1} = \frac{n!}{2} \qquad I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n!} \sqrt{\pi}.$$

9. Toto a malheureusement oublié le théorème de convergence dominée, et il ne se contente pas de la minoration de f par les fonctions f_n, il cherche aussi une majoration.

(a) Comme la fonction exponentielle est convexe (dérivée seconde positive), que la tangente en 0 a pour équation $y(t) = t + 1$, si $t \geqslant 0$ (valide sur $\mathbb{R}$),

$$\mathrm{e}^t \geqslant 1 + t$$

(b) Ainsi si $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-t} \leqslant \frac{1}{1+t}$ puis si $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{e}^{-t} = \left(\mathrm{e}^{\frac{-t}{n}} \right)^n \leqslant \left(\frac{1}{1 + \frac{t}{n}} \right)^n$$

(c) On en déduit que si $t \geqslant 0$, en appliquant à t^2, $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{n}} \right)^{-n}$.

(d) On pose $t = \sqrt{n} \tan(u) = \varphi(u)$, avec φ de classe $\mathcal{C}^1$, bijective, strictement croissante de $]0, \mathrm{Arctan}(A/\sqrt{n})[$ sur $]0, A[$, $\mathrm{d}t = \sqrt{n}(1 + \tan^2 u)\mathrm{d}u$, soit

$$\begin{aligned} \int_0^A \left(\frac{1}{1 + \frac{t^2}{n}} \right)^{-n} \mathrm{d}t &= \sqrt{n} \int_0^{\mathrm{Arctan}(A/\sqrt{n}} (1 + \tan^2(u))^{-n+2} \mathrm{d}u \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\mathrm{Arctan}(A/\sqrt{n}} \cos^{2n-2}(u) \mathrm{d}u \leqslant \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}(u) \mathrm{d}u \\ &= \sqrt{n} W_{2n-2} \end{aligned}$$

On aurait pu aussi effectuer un changement de variable généralisé $t = \sqrt{n} \tan(u) = \varphi(u)$, avec φ de classe $\mathcal{C}^1$, bijective, strictement croissante de $]0, \pi/2[$ sur $]0, +\infty[$.

(e) Toto obtient alors le joli encadrement en utilisant la décroissance évidente de (W_n)

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2} \leqslant \sqrt{n}W_{2n-3}$$

avec les gendarmes qui tendent tous les deux vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ce qui permet d'en déduire que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$