Devoir surveillé n°8
4 heures

Exercice I : intégrale de Gauss, le retour

On pose, lorsque cela est possible,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $f(0)$.

2. Montrer que
$$\forall x \geqslant 0\,,\; 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-x}$$
et en déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(x)$. On utilisera les segments de $\mathbb{R}$ de la forme $[-a, a]$ avec $a > 0$ pour l'application du théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre.
4. On considère la fonction φ définie par
$$\varphi(x) = 2f\left(\frac{x^2}{2}\right) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u\right)^2$$
Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer φ'. On trouvera en se forçant un peu $\varphi' = 0$.
5. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ puis la valeur de
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

Exercice II : produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que si $k \geqslant 0$, $t \mapsto t^k\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0, \infty[$. En déduire que l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.
2. Vérifier que l'application $(.|.) : \mathbb{R}_n[X]^2 \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire, c'est à dire que :
a) $(.|.)$ est symétrique
b) $(.|.)$ est bilinéaire
c) si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $(P|P) \geqslant 0$ et si $(P|P) = 0$ alors $P = 0$.

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$, à l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t.$$

4. Montrer que si $k \in [\![0, n]\!]$, $(X^k|1) = k!$. Déterminer $(X^p|X^q)$ si $(p, q) \in [\![0, n]\!]$.

Exercice III

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $g_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} g_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. On note G sa somme.
2. Soit $x_0 > 0$ fixé[1].
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $f_n : t \mapsto t^{x_0+n-1} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que l'on a :
   $$\int_0^1 t^{x_0+n-1} \ln(t) \mathrm{d}t = -\frac{1}{(x_0+n)^2}.$$
   (b) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n f_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ vers
   $$f : t \mapsto \frac{t^{x_0-1} \ln(t)}{1+t}.$$
   (c) En déduire que f est intégrable sur $]0, 1]$ et que l'on a :
   $$\int_0^1 \frac{t^{x_0-1} \ln(t)}{1+t} \mathrm{d}t = -G(x_0).$$

Problème

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.

1. Soit $x > 0$.
   (a) Montrer que $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-1}$. En déduire que $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0, 1]$.
   (b) Montrer que $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
   (c) En déduire que $\Gamma(x)$ est bien définie.
2. Montrer que le domaine de définition de Γ est $\mathcal{D} =]0, +\infty[$.
3. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. On utilisera une intégration par parties.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\Gamma(x+n) = (x+n-1) \cdots (x+1) x \Gamma(x)$$
5. Déterminer $\Gamma(1)$.

1. x dans l'énoncé originel

6. Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
7. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge et l'exprimer à l'aide de la fonction Γ.

   Mêmes questions avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^4}\mathrm{d}t$.
8. On pose si $x > 0$ et $t > 0$, $f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.
   (a) Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que si $t > 0$ et $x \in [a,b]$,
   $$t^x \leqslant \max(t^a, t^b) \leqslant t^a + t^b$$
   (b) Montrer que la fonction Γ est une fonction continue.
   (c) Justifier que $x \mapsto t^{x-1}$ est dérivable et vérifier que sa dérivée est
   $$x \mapsto \ln(t)t^{x-1}.$$
   (d) En déduire que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser $\Gamma'(x)$ sous forme d'une intégrale généralisée.
   (e) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et préciser $\Gamma^{(k)}(x)$ sous forme d'une intégrale généralisée pour tout $k \in \mathbb{N}$.
9. Montrer que la fonction Γ est convexe.
10. Montrer que Γ' s'annule en un un unique réel ζ dont on déterminera la partie entière. On utilisera $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$.
11. En déduire les variations de Γ sur $\mathcal{D}$.
12. Déterminer un équivalent de $\Gamma(x)$ en 0. On utilisera la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire la limite de Γ en 0.
    Quelle est la limite de Γ en $+\infty$?
13. Esquisser un joli graphe de Γ.
14. Dans ce qui suit, nous allons démontrer la formule de Gauss suivante
    $$\forall x > 0\,,\, \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.$$
    Pour $x > 0$, et pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $]0,+\infty[$ par
    $$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in]0,n] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$
    (a) Montrer que si $u > -1$, $\ln(1+u) \leqslant u$.
    (b) En déduire que si $n \geqslant 1$, $t \in]0,+\infty[$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.
    (c) Soit $t > 0$, montrer qu'il existe un rang à partir duquel $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ sur $]0,+\infty[$.
    (d) En déduire que
    $$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t$$
    On pose alors si $n \geqslant 1$, $x > 0$,
    $$I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t$$

(e) En effectuant un changement de variable adapté, montrer que

$$I_n(x) = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} \mathrm{d}u$$

On pose alors si $n \geqslant 0$, $x > 0$, $K_n = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} \mathrm{d}u$. Que vaut $K_0(x)$?

(f) Montrer que si $x > 0$ et $n \geqslant 1$,

$$K_n(x) = \frac{n}{x} K_{n-1}(x+1)$$

On utilisera une intégration par parties.

(g) En déduire, si $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$ une expression de $I_n(x)$ et conclure.

Fin

Exercice I : intégrale de Gauss

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction
$$t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$$
est continue sur le segment $[0,1]$, donc intégrable et ainsi $f(x)$ est bien défini. On a
$$f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}\, t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

2. On a bien sûr $f(x) \geqslant 0$. Et comme $x \geqslant 0$, pour $t \in [0,1]$ on a
$$\mathrm{e}^{-x(1+t^2)} = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-xt^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$$
et ainsi
$$f(x) \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x} f(0) = \frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-x}$$
On en déduit que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

3. On applique le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètre. On pose sur $\mathbb{R} \times [0,1]$
$$g(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$$
i) Pour tout x de $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,1]$, donc continue par morceaux et intégrable.
ii) Pour tout t de $[0,1]$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}$$
iii) Pour tout x de $\mathbb{R}$,
$$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}$$
est continue, donc continue par morceaux sur $[0,1]$.
iv) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$,
$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}$$
Pour $x \in [-a,a]$, avec $a > 0$, on a $-x(1+t^2) \leqslant a(1+t^2) \leqslant 2a$ et ainsi $\mathrm{e}^{-x(1+t^2)} \leqslant \mathrm{e}^{2a}$ d'où en posant $\varphi(t) = \mathrm{e}^{2a}$,
$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$
avec φ positive, continue par morceaux et intégrable sur $[0,1]$.

Ainsi d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a
$$f'(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

4. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ par opérations (composée, somme, produit). On a pour tout x réel

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= 2xf'\left(\frac{x^2}{2}\right) + 2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u \\
&= -2x \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}(1+t^2)} \mathrm{d}t + 2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u \\
&= 2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{(xt)^2}{2}} x\mathrm{d}t + 2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

On s'arrange pour fusionner les deux intégrales : on transforme la première en effectuant le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment , le segment $[0,1]$, $u = xt$, $\mathrm{d}u = x\mathrm{d}t$

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{(xt)^2}{2}} x\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u$$

et ainsi $\varphi'(x) = 0$. $\varphi' = 0$ sur $\mathbb{R}$, et donc φ est constante sur $\mathbb{R}$.

5. Or $\varphi(0) = 2f(0) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi φ est constante égale à $\frac{\pi}{2}$. On fait alors tendre x vers $+\infty$ dans la relation définissant φ, ce qui nous donne d'après les questions précédentes la convergence de l'intégrale et

$$\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

et ainsi

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

En effectuant le changement de variable $u = t\sqrt{2}$, les conditions requises étant satisfaites (u de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$, bijective strictement croissante)

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$$

et ainsi

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi} \approx 1,77$$

Exercice II : produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ CCNP 2019

1. Soit $k \geqslant 0$, $t \mapsto t^k \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0,\infty[$ et on a

$$t^2.t^k\mathrm{e}^{-t} = t^{2+k}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et ainsi $t^k\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ce qui assure l'intégralité en $+\infty$. Ainsi $t \mapsto t^k\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,\infty[$.

Comme $t \mapsto p(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est une combinaison linéaire de fonctions du type $t \mapsto t^k\mathrm{e}^{-t}$, on en déduit que l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.

2. On vérifie que l'application $(.|.) : \mathbb{R}_n[X]^2 \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire :
   a) $(.|.)$ est symétrique : si $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on a

$$(Q|P) = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = (P|Q).$$

   b) $(.|.)$ est bilinéaire : par symétrie, on ne vérifie que la linéarité selon la première position : soit $(P,Q,R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on a (les intégrales étant toutes convergentes) :

$$\begin{aligned}
(\lambda P + \mu Q|R) &= \int_0^{+\infty} (\lambda P(t) + \mu Q(t))R(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} (\lambda P(t)R(t) + \mu Q(t)R(t))\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} P(t)R(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + \mu \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \lambda(P|R) + \mu(Q|R).
\end{aligned}$$

   c) si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a déjà par positivité de l'intégrale

$$(P|P) = \int_0^{+\infty} P(t)^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \geqslant 0$$

   et si $(P|P) = 0$ alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 0$, avec $t \mapsto P^2(t)\mathrm{e}^{-t}$ continue positive et donc nulle sur $[0,+\infty[$ par théorème. Ainsi $P^2(t) = 0$ puis $P(t) = 0$ sur $[0,+\infty[$, ce qui implique que le polynôme P s'annule une infinité de fois et donc qu'il est nul.
   Ainsi nous avons bien un produit scalaire.
3. Soit $k \in [\![1,n]\!]$, à l'aide d'une intégration par parties généralisée, l'intégrale initiale étant convergente, avec $u(t) = t^k$, $u'(t) = kt^{k-1}$, $v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$, $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$, u et v de classe $\mathcal{C}^1$, sur $[0,+\infty[$, et avec $u(t)v(t)$ qui admet des limites nulles en 0 et en $+\infty$,

$$\begin{aligned}
I_k = \int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t &= 0 - 0 - \int_0^{+\infty} kt^{k-1}(-\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t) \\
&= k\int_0^{+\infty} t^{k-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = kI_{k-1}
\end{aligned}$$

4. Soit $k \in [\![0,n]\!]$, nous avons en itérant la relation précédente,

$$(X^k|1) = I_k = kI_{k-1} = k(k-1)(k-2)\cdots 1.I_0 = k!$$

   Si $(p,q) \in [\![0,n]\!]$, on a

$$(X^p|X^q) = \int_0^{+\infty} t^p t^q \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = I_{p+q} = (p+q)!$$

Exercice III : CCNP 2021

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $g_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}.$$

1. Soit $x > 0$, on considère la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$. Comme on a

$$\left|\frac{(-1)^n}{(x+n)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(x+n)^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

cette série numérique converge absolument, donc converge. Ainsi la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. On note G sa somme.

2. Soit $x_0 > 0$ fixé.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto t^{x_0+n-1}\ln(t)$ est continue sur $]0,1]$. On a si $n \geqslant 1$, $x_0 + n - 1 > 0$ et ainsi

   $$f_n(t) = t^{x_0+n-1}\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

   ce qui assure l'intégrabilité de f_n sur $]0,1]$ (on peut même prolonger f_n par contnuité en 0 en posant $f_n(0) = 0$).
   Pour $n = 0$, nous avons $x_0 - 1 > -1$ et

   $$f_0(t) = t^{x_0-1}\ln(t)\mathrm{d}t = t^{x_0/2-1}\underbrace{t^{x_0/2}\ln(t)}_{\longrightarrow_{t\to 0}\, 0} = \mathrm{o}_0(t^{x_0/2-1})$$

   avec $\frac{x_0}{2} - 1 > -1$, ce qui assure l'intégrabilité en 0.
   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto t^{x_0+n-1}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$.

   Par une intégration par parties généralisée, le terme entre crochet étant bien défini (et égal à 0)

   $$\begin{aligned}\int_0^1 t^{x_0+n-1}\ln(t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{x_0+n}}{x_0+n}\ln(t)\right]_0^1 - \frac{1}{x_0+n}\int_0^1 t^{x_0+n} \times \frac{1}{t}\mathrm{d}t \quad = -\frac{1}{x_0+n}\int_0^1 t^{x_0+n-1}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{x_0+n}\left[\frac{t^{x_0+n}}{x_0+n}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{(x_0+n)^2}\end{aligned}$$

   On remarquera que cette intégration par parties généralisée permet aussi de prouver directement la convergence de l'intégrale, et comme la fonction est négative, son intégrabilité.

   (b) Soit $t \in]0,1]$, on rappelle que si $t \in]0,1[$,

   $$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$$

   et ainsi

   $$\frac{t^{x_0-1}\ln(t)}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t x_0 + n - 1\ln(t)$$

   valide aussi si $t = 1$. Ainsi la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1]$ vers

   $$f : t \mapsto \frac{t^{x_0-1}\ln(t)}{1+t}.$$

(c) Nus allons alors appliquer le théorème interversion somme infinie et intégrales généralisée. On considère la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |f_n(t)|dt$$

On a puisque la fonction f_n est négative,

$$\int_0^1 |f_n(t)|dt = -\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(x_0+n)^2}\sim\frac{1}{n^2}$$

ce qui assure la convergence de la série.

Ainsi f est intégrable sur $]0,1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 \frac{t^{x_0-1}\ln(t)}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(x_0+n)^2} = -G(x_0)$$

Problème

1. Soit $x>0$.
   (a) Nous avons e^{-t} qui tend vers 1 si t tend vers 0 et ainsi
   $$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$$
   Comme $x-1>-1$, on en déduit $t\mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0,1]$.
   (b) On a
   $$t^2.t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0 \qquad t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
   et ainsi $t\mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   (c) On en déduit que $t\mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et donc que $\Gamma(x)$ est bien définie.
2. si $x\leqslant 0$, comme
   $$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$$
   nous obtenons que $t\mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$, et donc, puisque la fonction est positive, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ ne converge pas. Ainsi on ne peut pas définir $\Gamma(x)$. Donc le domaine de définition de Γ est $\mathcal{D}=]0,+\infty[$.
3. Soit $x\in\mathcal{D}$, on procède par intégration par parties généralisée, en transformant l'intégrale convergente $\gamma(x+1)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, les intégrales étant convergentes, en posant
   $$\begin{cases}u(t)=t^{x+1}\\ v'(t)=\mathrm{e}^{-t}\end{cases}\qquad\begin{cases}u'(t)=(x+1)t^x\\ v(t)=-\mathrm{e}^{-t}\end{cases}$$
   avec u,v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et
   $$u(t)v(t)=t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0 \qquad u(t)v(t)=t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$$
   soit
   $$\gamma(x+1)=\int_0^{+\infty}t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 0-0-\int_0^{+\infty}(x+1)t^x(-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t=(x+1)\Gamma(x)$$
   Donc on a bien $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

4. Soit $x > 0$, on procède par récurrence sur $n \geqslant 0$.
Pour $n = 0$, $\Gamma(x) = \Gamma(x)$, le produit étant vide égal à 1.
Pour $n = 1$, $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.
On suppose que $\Gamma(x + n) = (x + n - 1) \cdots (x + 1)x\Gamma(x)$, alors en appliquant la question précédente à $x + n$, nous avons
$$\Gamma(x + n + 1) = (x + n + 1)\Gamma(x + n)$$
puis par l'hypothèse de récurrence
$$\Gamma(x + n + 1) = (x + n + 1)(x + n - 1) \cdots (x + 1)x\Gamma(x)$$
ce qui achève la récurrence. On en déduit que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\Gamma(x + n) = (x + n - 1) \cdots (x + 1)x\Gamma(x)$$
5. Nous avons
$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1.$$
6. On applique l'égalité précédente à $x = 1$, on obtient si $n \geqslant 1$,
$$\Gamma(n + 1) = n.(n - 1) \cdots 2.1\Gamma(1) = n!$$
Ainsi pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n - 1)!$.
7. On effectue le changement de variable $u = t^2$, $\mathrm{d}u = 2t\mathrm{d}t = 2\sqrt{u}\mathrm{d}t$, u bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ et donc les deux intégrales
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}u^{-1/2}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$
sont de même nature. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge et on a
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}u^{-1/2}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right).$$
On effectue le changement de variable $u = t^4$, $\mathrm{d}u = 4t^3\mathrm{d}t = 4u^{3/4}\mathrm{d}t$, u bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ et donc les deux intégrales
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^4}\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{4}u^{-3/4}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$
sont de même nature. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^4}\mathrm{d}t$ converge et on a
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^4}\mathrm{d}t == \frac{1}{4}\Gamma\left(-\frac{3}{4}\right).$$
8. On pose si $x > 0$ et $t > 0$, $f(x, t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.
   (a) Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Soit $t > 0$ et $x \in [a, b]$, on a
   $$t^x = \mathrm{e}^{x\ln(t)}$$
   Si $0 < t \leqslant 1$, $\ln(t) \leqslant 0$ et donc $b\ln(t) \leqslant x\ln(t)a\ln(t)$ d'où $t^b \leqslant t^x \leqslant t^a$.
   Si $t \geqslant 1$, $\ln(t) \geqslant 0$ et donc $a\ln(t) \leqslant x\ln(t) \leqslant b\ln(t)$ et $t^a \leqslant t^x \leqslant t^b$. Ainsi dans les deux cas,
   $$t^x \leqslant \max(t^a, t^b) \leqslant t^a + t^b$$

(b) On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètre, version sur tout segment de $]0,+\infty[$.
• pour tout $t>0$, $x \mapsto f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t}$ est continue.
• pour tout $x>0$, $t \mapsto f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t}$ est continue (par morceaux).
• Si $x \in [a,b]$, $t>0$, nous avons d'après la question précédente, $t^x \leqslant t^a + t^b$ et ainsi

$$|f(x,t)| = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \leqslant (t^{a-1}+t^{b-1})\mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ comme somme de deux fonctions intégrables. Ainsi la fonction Γ est une fonction continue sur $]0,+\infty[$.

(c) La fonction $x \mapsto t^{x-1} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln(t)}$ est dérivable par composition de fonctions dérivables, et on a a sa dérivée qui est

$$x \mapsto \ln(t)_e e^{(x-1)\ln(t)} = \ln(t)t^{x-1}.$$

(d) On applique le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre, version sur tout segment de $]0,+\infty[$.
• pour tout $t>0$, $x \mapsto f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
• pour tout $x>0$, $t \mapsto f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t}$ est continue (par morceaux) et intégrable.
• pour tout $x>0$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \ln(t)t^{x-1}$ est continue par morceaux.
• Si $x \in [a,b]$, $t>0$, nous avons $t^x \leqslant t^a + t^b$ et ainsi

$$|f(x,t)| = |\ln(t)|t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \leqslant (t^{a-1}+t^{b-1})|\ln(t)|\mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

La fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$ et on étudie alors l'intégrabilité de $\varphi_a : t \mapsto \ln(t)t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}$ sur $]0,+\infty[$. Nous avons

$$t^2\ln(t)t^{a-1}\mathrm{e}^{-t} = \ln(t)\mathrm{e}^{-t/2}.t^{a+1}\mathrm{e}^{-t/2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \ln(t)t^{a-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

et ainsi φ_a est intégrable en $+\infty$ et

$$\ln(t)t^{a-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{0}{\sim} \ln(t)t^{a-1} = \underbrace{\ln(t)t^{a/2}}_{\longrightarrow_{t\to0}\,0}.t^{a/2-1}$$

et ainsi $\ln(t)t^{a-1} = \mathrm{o}_0(t^{a/2-1})$ avec $a/2-1 > -1$ d'où l'intégrabilité en 0.

Ainsi φ est intégrable sur $]0,+\infty[$ comme somme de deux fonctions intégrables φ_a et φ_b. Ainsi Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

(e) On applique le théorème de classe $\mathcal{C}^k$ des intégrales à paramètre, version sur tout segment de $]0,+\infty[$, ce qui revient à obtenir une majoration de domination uniforme en x des dérivées partielles : on a si $x \in [a,b]$, $t>0$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |\ln(t)|^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \leqslant (t^{a-1}+t^{b-1})|\ln(t)|^k\mathrm{e}^{-t}$$

avec $\varphi_a : t \mapsto t^{a-1}\ln^k(t)\mathrm{e}^{-t}$ intégrable sur $]0,+\infty($ puisque

$$t^2\ln^k(t)t^{a-1}\mathrm{e}^{-t} = \ln^k(t)\mathrm{e}^{-t/2}.t^{a+1}\mathrm{e}^{-t/2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \ln^k(t)t^{a-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

d'où l'intégrabilité de φ_a en $+\infty$ et

$$\ln^k(t)t^{a-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{0}{\sim} \ln^k(t)t^{a-1} = \underbrace{\ln^k(t)t^{a/2}}_{\longrightarrow_{t\to 0}\, 0}.t^{a/2-1}$$

et ainsi $\ln^k(t)t^{a-1} = \mathrm{o}_0(t^{a/2-1})$ avec $a/2-1 > -1$ d'où l'intégrabilité en 0.

Ainsi Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on a sur $]0,+\infty[$

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^k(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

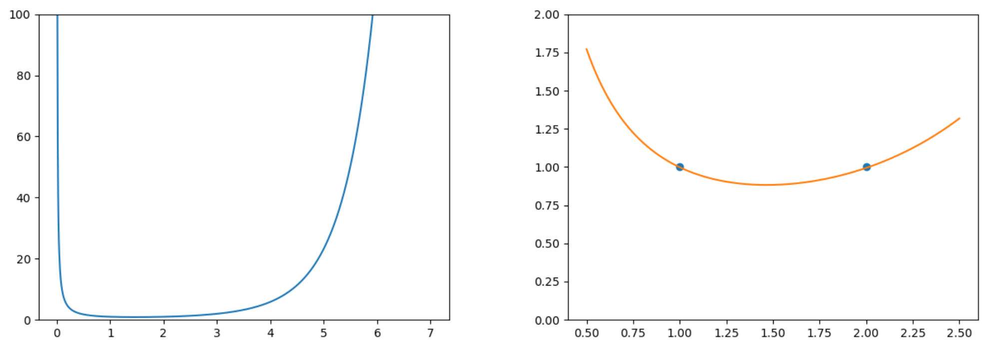
9. Nous avons ainsi sur $]0,+\infty[$, $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \geqslant 0$ et donc la fonction Γ est convexe.
10. On remarque que $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Ainsi, d'après le théorème de Rolle, la fonction Γ étant continue sur $[1,2]$, dérivable sur $]1,2[$, Γ' s'annule en ζ avec $1 < \zeta < 2$. Comme de plus $\Gamma'' > 0$, la fonction Γ' est strictement croissante, continue, et donc finalement elle s'annule uniquement en ζ, de partie entière 1.
11. On en déduit les variations de Γ sur $\mathcal{D}$ (avec les limites prouvées plus loin) :

x	0		1	ζ	2		$+\infty$
$\Gamma'(x)$	$\|\|$	$-$		0		$+$	
Γ	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$		$\Gamma(\zeta)$		$\nearrow$	$+\infty$

12. Comme $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, et que Γ continue en 1, nous avons

$$x\Gamma(a) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \Gamma(1) = 1$$

et ainsi $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$. On en déduit que Γ tend vers $+\infty$ en 0.
Comme Γ strictement croissante sur $[\zeta,+\infty[$, d'après le théorème de la limite monotone, Γ admet une limite finie ou infinie en $+\infty$. Comme $\Gamma(n) = (n-1)!$, cette limite est forcément $+\infty$.
13. On en déduit un joli graphe de Γ :



14. (a) La fonction ln étant concave, $u \mapsto \ln(1+u)$ aussi sur $]-1,+\infty[$, et sa courbe est donc située en dessous de la tangente en 0 dont une équation est $u \mapsto u$. Donc si $u > -1$, $\ln(1+u) \leqslant u$.

(b) Soit $n \geqslant 1$, $t \in]0,+\infty[$, si $t \in]0,n[$, $\frac{t}{n} \in]0,1[$, $-\frac{t}{n} \in]-1,0[$ et ainsi $\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leqslant -\frac{t}{n}$, puis $n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leqslant -t$, et ainsi

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

d'où

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \leqslant \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$$

Si $t = n$ ou $t > n$, $f_n(t) = 0$. Ainsi $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

(c) Soit $t > 0$, il existe un rang à partir duquel $n > t$ et ainsi $f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$. On a alors

$$f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}t^{x-1} = \mathrm{e}^{-t+\mathrm{o}(1)}t^{x-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$$

Ainsi la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ sur $]0,+\infty[$.

(d) On applique alors le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (f_n), suite de fonctions continues sur $]0,+\infty[$, qui converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$, dominée par cette même fonction, qui est intégrable d'après 1b. On en déduit que

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$$

soit encore

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t$$

(e) On effectue le changement de variable $u = \frac{t}{n}$, bijection croissante $\mathcal{C}^1$ de $]0,n[$ sur $]0,1[$, d'où sachant que $\mathrm{d}t = n\mathrm{d}u$,

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n(nu)^{x-1}n\mathrm{d}u = n^x\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\mathrm{d}u$$

On a

$$K_0(x) = \int_0^1 (1-u)^0u^{x-1}\mathrm{d}u = \int_0^1 u^{x-1}\mathrm{d}u = \left[\frac{u^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$$

(f) Soit $x > 0$ et $n \geqslant 1$, par intégration par parties généralisée,

$$\begin{aligned}
K_n(x) &= \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{u^x}{x}(1-u)^n\right]_0^1 - \frac{1}{x}\int_0^1 (-n)(1-u)^{n-1}u^x\mathrm{d}u \\
&= \frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^x\mathrm{d}u = \frac{n}{x}K_{n-1}(x+1)
\end{aligned}$$

(g) On en déduit, par itération de la relation précédente,si $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$,

$$K_n(x) = \frac{n}{x} K_{n-1}(x+1) = \frac{n}{x} . \frac{n-1}{x+1} \cdots \frac{1}{x+n-1} K_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

et ainsi finalement

$$I_n(x) = \frac{n! n^x}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (x+k)}$$