Quinzaine 11 du 25/03 au 05/04

Chapitre 7 : *Espaces vectoriels normés*
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe ; espace vectoriel normé. Normes usuelles $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Exemple de la norme infinie sur l'espace des fonctions bornées.
Norme associée à un produit scalaire. Exemples usuels.
Distance associée à une norme. Boules ouvertes, boules fermées, sphères.
Parties convexes. Exemples. Convexité des boules (*).
Parties bornées, suites bornées, fonctions bornées.

Convergence et divergence d'une suite. Exemples divers. Unicité de la limite. Opérations. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.

Comparaison des normes. Normes équivalentes. Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence.
Comparaison des normes usuelles $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ et interprétation graphique.

Topologie d'un espace vectoriel normé : les notions sont invariantes par passage à une norme équivalente.
Point intérieur à une partie. Partie ouverte. Une boule ouverte est un ouvert.
Stabilité par réunion quelconque et intersection finie.
Partie fermée. Une partie est fermée si et seulement si son complémentaire est une partie ouverte.
Caractérisation séquentielle des parties fermées. Stabilité par réunion finie et intersection quelconque.
Une boule fermée, une sphère sont des fermés.
Point adhérent à une partie. Adhérence. Caractérisation séquentielle d'un point adhérent. Partie dense. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: tout réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.
Caractérisation séquentielle. Opérations algébriques sur les limites, composition.
Continuité en un point. Lien avec la continuité des composantes. Caractérisation séquentielle.
Continuité sur une partie : opérations algébriques, composition.
Continuité de la norme, des applications coordonnées.
Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés. Exemples.
Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.

En dimension finie : toutes les normes sont équivalentes (admis). Équivalence entre l'existence d'une limite d'une fonction et celle des limites des coordonnées de la fonction dans une base de l'espace d'arrivée de dimension finie. Équivalence entre l'existence d'une limite d'une suite et celle des limites des coordonnées de la suite dans une base de l'espace d'arrivée.
Théorème des bornes atteinte : toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée en dimension finie est bornée et atteint ses bornes (admis).
Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales. Exemple du déterminant selon les lignes ou colonnes (multilinéarité), selon les coefficients (polynomiale), du produit matriciel, du produit scalaire.
La notion de norme subordonnée est hors programme.

Chapitre 8 : *Espaces euclidiens*
Révisions (partielles) : produit scalaire. Espace préhilbertien, espaces euclidiens.
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Produit scalaire intégral sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exemples de produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[X]$, sur $\mathbb{R}[X]$.
Norme associée à un produit scalaire. Distance associée à la norme.
Relations entre produit scalaire et norme (*). Identité du parallélogramme.
Propriétés caractéristiques d'une norme (séparation, homogénéité, inégalité triangulaire).
Vecteurs orthogonaux. Théorème de Pythagore. Vecteur unitaire. Famille orthogonale. Famille orthonormale ou orthonormée. Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls.

Isométries vectorielles : un endomorphisme d'un espace euclidien E est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.
Une application linéaire qui conserve la norme est injective.
En dimension finie, une application linéaire qui conserve la norme est un automorphisme..
Autre dénomination des isométries vectorielles d'un espace euclidien : automorphismes orthogonaux.
Caractérisations par la conservation du produit scalaire (*), par l'image d'une (de toute) base orthonormale (*).
En remarque : une application de E dans E (E de dimension quelconque) qui conserve le produit scalaire est forcément linéaire.
Exemple des symétries orthogonales et réflexions orthogonales.

Questions de cours :
- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.