CCP PC 2023

Q1 Nous avons dans cette question $n = 2$. On a $v = (1, 0)$, puis $f(v) = (4, 1)$ non colinéaire à v et ainsi la famille $(v, f(v))$ est libre, de cardinal 2 la dimension de l'espace $\mathbb{R}^2$ et ainsi $(v, f(v))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donc f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.

Q2 La matrice de f dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 2 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 1) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)$$

(factorisation évidente avec la propriété de la somme et du produit des racines). Ainsi f admet deux valeurs propres 2 et 3. On peut affirmer ici que f est diagonalisable et que les deux espaces propres sont des droites vectorielles. On détermine alors les espaces propres associés :

$$MX = 2X \iff \begin{cases} 4x - 2y = 2x \\ x + y = 2y \end{cases} \iff x = y \iff (x, y) = x(1, 1)$$

Ainsi $E_2 = \text{Vect}((1, 1))$. On a aussi

$$AX = 3X \iff \begin{cases} 4x - 2y = 3x \\ x + y = 3y \end{cases} \iff x = 2y \iff (x, y) = (2y, y) = y(2, 1)$$

Ainsi $E_3 = \text{Vect}((2, 1))$.

Q3 Soit w non nul. $(w, f(w))$ n'est pas une base si et seulement si $(w, f(w))$ non libre si et seulement si comme w non nul, $f(w)$ colinéaire à w, c'est à dire si et seulement si w est un vecteur propre de f. Donc si $w \notin E_2 \cup E_3$ (et donc non nul), $(w, f(w))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Par un raisonnement naïf direct : soit $w(x, y)$ alors $f(w) = (4x - 2y, x + y)$. Donc $(w, f(w))$ non base si et seulement $\det(w, f(w)) = 0$ si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x & 4x - 2y \\ y & x + y \end{vmatrix} = 0$$

soit $x(x+y)-y(4x-2y) = 0$ soit encore $x^2+xy-4xy+2y^2 = 0$ soit encore $x^2+2y^2-3xy = 0$. Or

$$x^2 + 2y^2 - 3xy = (x - \frac{3}{2}y)^2 - \frac{1}{4}y^2$$

s'annule si et seulement si

$$x - \frac{3}{2}y = \pm\frac{1}{2}y$$

soit $x = 2y$ ou $x = y$, c'est à dire si $w \in E_2 \cup E_3$.

Q4 On procède matriciellement. La matrice de g^2 est M^2 et la matrice de $g + 2\mathrm{id}$ est $M + 2I_3$, ceci dans la base canonique. Or

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = M + 2I_3$$

et donc $g^2 = g + 2\mathrm{id}$.

Q5 A) La matrice M est une matrice symétrique réelle, et donc elle est diagonalisable. On détermine son polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda+1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \text{ puis } L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ &= (\lambda+1)^2 \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)^2(\lambda-2) \end{aligned}$$

Ainsi M admet -1 et 2 comme valeurs propres, de multiplicité 2 et 1 respectivement. Comme M est diagonalisable, on peut affirmer que E_{-1} est un plan vectoriel et E_2 une droite vectorielle. La trace de M nulle permet de vérifier.

B) Mieux : nous avons aussi un polynôme annulateur $P = X^2 - X - 2$, $P = (X+1)(X-2)$, scindé à racines simples -1 et 2, et ainsi M est diagonalisable, et le spectre de M est contenu dans $\{-1, 2\}$.
Si une matrice diagonalisable admet une unique valeur propre, elle est proportionnelle à I_3. Donc le spectre de M est forcément $\{-1, 2\}$.

Q6 Si g état cyclique, il existerait un vecteur v de sorte que $(v, g(v), g^2(v))$ soit une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui contredirait le fait que $g^2(v) = g(v) + 2v$ de Q4.
Donc g n'est pas cyclique.

Q7 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(X+1)$ est aussi dans $\mathbb{R}_n[X]$ et donc $\Delta(P) = P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda P + \mu Q) &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - \lambda P(X) - \mu Q(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q) \end{aligned}$$

Ainsi Δ est linéaire, de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ et c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q8 Nous avons

$$\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i = 1 + kX + \frac{k(k-1)}{2} X^2 + \cdots + kX^{k-1}$$

Q9 On suppose que $P \in \mathbb{R}_n[X]$, non constant. Alors on note p son degré,

$$P = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

avec $p \geqslant 1$ et $a_p \neq 0$. Alors

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^{p} a_k \Delta(X^k) = a_p \Delta(X^p) + \sum_{k=0}^{p-1} a_k \Delta(X^k)$$

D'après la question Q8, la somme $\sum_{k=0}^{p-1} a_k \Delta(X^k)$ sera degré inférieur à $p-2$, et $a_p\Delta(X^p)$ de degré $p-1$. Ainsi on a bien $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

Q10 Soit P de degré n. Alors d'après la question précédente, $\Delta(P)$ est de degré $n-1$, puis de même $\Delta^2(P)$ de degré $n-2$ et par récurrence sur $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\Delta^k(P)$ de degré $n-k$. On en déduit que la famille

$$(P, \Delta(P), \Delta^2(P), \ldots, \Delta^n(P))$$

est une famille de polynômes de degré échelonnée de 0 à n, et ainsi c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc, par définition, l'endomorphisme Δ est bien cyclique.

Q11 On procède par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.
Pour $p = 0$, c'est l'hypothèse

$$h^0(v) = v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

On suppose que le résultat est vrai pour un certain p, c'est à dire que

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$$

Alors en appliquant h qui est linéaire, on obtient

$$h^{p+1}(v) = \alpha_1 \lambda_1^p h(v_1) + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p h(v_n)$$

et ainsi

$$h^{p+1}(v) = \alpha_1 \lambda_1^p . \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p \lambda_n v_n$$

soit encore

$$h^{p+1}(v) = \alpha_1 \lambda_1^{p+1} h(v_1) + \cdots + \alpha_n \lambda_n^{p+1} h(v_n)$$

ce qui achève la récurrence.

Q12 La matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\lambda_1 & \cdots & \alpha_1\lambda_1^{n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_2\lambda_2 & \cdots & \alpha_2\lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n\lambda_n & \cdots & \alpha_n\lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

de déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\lambda_1 & \cdots & \alpha_1\lambda_1^{n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_2\lambda_2 & \cdots & \alpha_2\lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n\lambda_n & \cdots & \alpha_n\lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdots \alpha_n \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

qui fait apparaître un déterminant de Vandermonde $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, soit

$$\alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Q13 Si h est cyclique, il existe un vecteur v de sorte question$(v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v))$ soit une base et ainsi la quantité ci-dessus est non nulle, et donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont 2 à 2 distinctes. Ainsi h admet n valeurs propres distinctes.
Réciproquement, si h admet n valeurs propres distinctes, en choisissant un vecteur v de sorte que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ soient non nuls, par exemple avec $v = v_1 + \cdots + v_n$, nous obtenons une famille $(v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v))$ dont le déterminant dans $\mathcal{B}$ est non nul, donc étant une base de E et ainsi h est cyclique.
Ainsi si h est diagonalisable, h est cyclique si et seulement si il admet n valeurs propres distinctes.

Q14 Soit $t>0$ et $x \leqslant 1$, $\mathrm{e}^t>1$ et ainsi $\mathrm{e}^t>x$. Donc $f(t,x)$ est bien défini. On en déduit que la fonction f est bien définie sur $]0,+\infty[\times]-\infty,1]$.

Q15 On considère $t \mapsto f(t,1)=\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}$ sur $]0,+\infty[$.
La fonction est continue, donc continue par morceaux. Nous avons

$$\frac{t}{\mathrm{e}^t-1} \underset{0}{\sim} \frac{t}{t}=1$$

d'où l'intégrabilité en 1. De plus, comme

$$t^2 \times \frac{t}{\mathrm{e}^t-1} \underset{+\infty}{\sim} t^3\mathrm{e}^{-t} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

on a

$$\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}=\mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui assure l'intégrabilité en $+\infty$. Ainsi $t\mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Q16 Soit $x\in]-\infty,1]$. Pout $t\in]0,+\infty[$, $\mathrm{e}^t-x\geqslant \mathrm{e}^t-1>0$, et ainsi

$$0<\frac{1}{\mathrm{e}^t-x}\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}^t-1}$$

puis

$$0<f(t,x)\leqslant f(t,1)$$

Ainsi comme $t\mapsto f(t,x)$ est continue sur $]0,+\infty[$, que $t\mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, nous obtenons que $t\mapsto f(t,x)$ est aussi intégrable sur $]0,+\infty[$.

Q17 Montrons que $x\mapsto\int_0^{+\infty}f(t,x)\mathrm{d}t$ est continue sur $]-\infty,1]$, ce qui permettra d'en déduire que L est continue. On utilise pour cela le théorème de continuité des intégrales à paramètre.
1) Pour tout $t\in]0,+\infty[$, $x\mapsto f(t,x)=\frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t-x}$ est continue sur $]-\infty,1]$.
2) Pour tout $x\in]-\infty,1]$, $t\mapsto f(t,x)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
3) Si $x\in]-\infty,1]$, $t\in]0,+\infty[$, on a

$$|f(t,x)|\leqslant f(t,1)=\varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0,+\infty[$.
Ainsi $x\mapsto\int_0^{+\infty}f(t,x)\mathrm{d}t$ est continue sur $]-\infty,1]$ et il s'ensuit que L est aussi continue sur $]-\infty,1]$ comme produit de deux fonctions continues.

Q18 On a $t\mapsto s_n(t)$ continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 donc intégrable en 0 et avec

$$t^2s_n(t)=t^3\mathrm{e}^{-(n+1)t}x^n \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et ainsi $s_n(t)=\mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ce qui assure l'intégrabilité de s_n en $+\infty$.
Ainsi l'intégrale converge bien (elle est absolument convergente même).

Soit $A>0$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^A s_n(t)\mathrm{d}t &= x^n\int_0^A t\mathrm{e}^{-(n+1)t}\mathrm{d}t\\ &= x^n\left(\left[-\frac{t}{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)t}\right]_0^A+\frac{1}{n+1}\int_0^A \mathrm{e}^{-(n+1)t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{x^n}{+1}A\mathrm{e}^{-(n+1)A}+\frac{1}{(n+1)^2}\left(1-\mathrm{e}^{-(n+1)A}\right)\end{aligned}$$

et en passant à la limite lorsque A tend vers $+\infty$, nous obtenons

$$\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}$$

Q19 Soit $t > 0$, on étudie la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} s_n(t)$ c'est à dire $\sum\limits_{n\geqslant 0} t\mathrm{e}^{-(n+1)t}x^n$. On a en fait

$$s_n(t) = t\mathrm{e}^{-t}(x\mathrm{e}^{-t})^n$$

On reconnaît donc une série proportionnelle à une série géométrique complète de raison $x\mathrm{e}^{-t}$ avec $|x\mathrm{e}^{-t}| \leqslant \mathrm{e}^{-t} < 1$ puisque $|x| \leqslant 1$.
Ainsi la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} s_n(t)$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = t\mathrm{e}^{-t} \times \frac{1}{1 - x\mathrm{e}^{-t}} = \frac{t}{\mathrm{e}^t - x} = f(t,x)$$

Ainsi la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} s_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ de somme $t \mapsto f(t,x)$.

Q20 On a $x \in [-1,1]$, et ainsi $\dfrac{x^2}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ et donc par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^2}{n^2}$ est convergente.
On applique le théorème d'interversion somme infinie – intégrale :
– la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geqslant 0} xs_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers $t \mapsto xf(t,x)$
– la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |xs_n(t)|\mathrm{d}t$ qui est en fait $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} xs_n(t)\mathrm{d}t$ est la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ qui converge
Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} xs_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} xs_n(t)\right) \mathrm{d}t$$

soit encore

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - x}\mathrm{d}t = L(x)$$

Q21 Soit $x \in [-1,1]$, on a (les puissances impaires se neutralisent)

$$\begin{aligned}
L(x) + L(-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n^2} \\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n^2} \\
&= \frac{1}{2}L(x^2)
\end{aligned}$$

Q22 Pour $x = 1$, la relation précédente s'écrit $L(1) + L(-1) = \frac{1}{2}L(1)$ et ainsi $L(-1) = -\frac{1}{2}L(1)$. Donc avec la donnée de l'énoncé,

$$L(1) = \frac{\pi^2}{6} \qquad L(-1) = -\frac{\pi^2}{12}$$

Q23 D'après la question Q20, la fonction L est développable en série entière avec un rayon de convergence $R \geqslant 1$ et même $R = 1$ par propriété (forme $a_n = n^{-2}$). Ainsi L est dérivable sur $]-1,1[$, et on a par dérivation terme à terme

$$L'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^{n-1}$$

Si $x = 0$, $L'(0) = 1$.
Si $x \neq 0$, on a

$$L'(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

Q24 Sur $]0,1[$, h dérivable avec

$$\begin{aligned} h'(x) &= L'(x) - L'(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) - \frac{1}{1-x}\ln(x) \\ &= -\frac{ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(x)}{1-x} + \frac{1}{x}\ln(1-x) - \frac{1}{1-x}\ln(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et ainsi h est constante sur l'intervalle $]0,1[$.

Q25 Pour $x = \frac{1}{2}$,

$$L(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t - 1} dt$$

Or

$$h(1/2) = L(1) = 2L(1/2) + \ln^2(2)$$

et ainsi

$$L(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t - 1} dt = \frac{L(1) - \ln^2(2)}{2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2(2)}{2}$$

Q26 La variable aléatoire X_n représente le nombre de cases avancées au coup n ; la variable aléatoire S_n représente le nombre total de cases avancées jusqu'au coup n compris.

Q27 La variable aléatoire T représente le minimum de coups qui a permis de d'avancer d'au moins (au sens large) A cases, 0 sinon.

Q28 On sait que sur $]-1,1[$, on a

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

développable en série entière, avec un rayon de convergence 1. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. On peut aussi invoquer que f est une fraction rationnelle, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition qui contient $]-1,1[$. On montre alors par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$

Pour $p = 0$, cela est vérifié. On suppose que

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$

Alors, en dérivant, pour $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} f^{(p+1)}(x) &= \left(f^{(p)}\right)'(x) = \left[\frac{p!}{(1-x)^{p+1}}\right]' \\ &= (p!(1-x)^{-(p+1)})' = -(p+1)p!(-1)(1-x)^{-(p+1)-1} \\ &= \frac{(p+1)!}{(1-x)^{p+2}} \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

Q29 Posons $a_n = \binom{n}{p}$. On a $a_n \neq 0$ et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{n+1}{p}}{\binom{n}{p}} = \frac{(n+1)!p!(n-p)!}{p!(n+1-p)!n!} = \frac{n+1}{n+1-p} \sim 1$$

et ainsi d'après la règle de de d'Alembert appliquée aux série entière non lacunaire, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant p} \binom{n}{p} x^n$ est $R = 1$.

Q30 On sait que sur $]-1,1[$, on a

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

développable en série entière, avec un rayon de convergence 1. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et on peut dériver terme à terme, à l'ordre p, soit donc

$$f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)x^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p}$$

d'où en multipliant par x^p et en divisant par $p!$ la relation

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

Q31 Nous avons donc chaque X_n suivant la loi uniforme sur $\{0,1\}$ soit en fait la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Comme $X_1, \ldots, X_n$ sont supposées indépendantes, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètre n et $1/2$.

Q32 La variable aléatoire S_n prend les valeurs $0, 1, \ldots, n$. Ainsi la variable aléatoire T prend la valeur : – 0 si pour tout n, $S_n > A$.
– A si $X_1 = 1, \ldots, X_A = 1$,
– $A+1$ si $X_1 = 0$, $X_2 = \cdots = X_{A+1} = 1$, – $k = A + i \geqslant A$ si $X_1 = \cdots = X_i = 0$ et $X_{i+1} = \cdots = X_{A+i} = 1$.
Ainsi T prend les valeurs entières $0, A, A+1, \ldots$.

Q33 Nous avons par définition

$$(T = k) = (S_k \geqslant A) \cap (S_{k-1} < A)$$

que l'on peut transformer en (valeurs entières)

$$(T = k) = (S_k \geqslant A) \cap (S_{k-1} \geqslant A - 1)$$

et puisque $S_k = S_{k-1} + X_k$ avec $X_k \in \{0,1\}$.

$$(T = k) = (S_k \geqslant A) \cap (S_{k-1} = A - 1) = (S_{k-1} = A - 1) \cap (X_k = 1)$$

Ainsi
$$P(T=k)=P((S_{k-1}=A-1)\cap(X_k=1))$$
Or $X_1,\dots,X_k$ sont indépendantes, donc par le lemme des coalitions, $X_1+\cdots+X_{k-1}=S_{k-1}$ est indépendante de X_k et ainsi les événements $(S_{k-1}=A-1)$ et $(X_k=1)$ sont indépendants, donc
$$P(T=k)=P((S_{k-1}=A-1)P(X_k=1)=\binom{k-1}{A-1}\frac{1}{2^{k-1}}\times\frac{1}{2}=\binom{k-1}{A-1}\frac{1}{2^k}.$$

Q34 D'après la question Q32, les événements
$$(T=0),(T=A),(T=A+1),\dots$$
constituent un système complets d'événements, et ainsi
$$P(T=0)+\sum_{k=A}^{+\infty}P(T=k)=1$$
et ainsi
$$P(T=0)=1-\sum_{k=A}^{+\infty}\binom{k-1}{A-1}\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2}\sum_{k=A-1}^{+\infty}\binom{k}{A-1}\frac{1}{2^k}$$
et en utilisant la question Q30 avec $x=1/2$, $p=A-1$,
$$P(T=0)=1-\frac{1}{2}\frac{(1/2)^{A-1}}{(1/2)^A}=1-1=0$$

Q35 On utilise la règle de d'Alembert pour les séries non lacunaire (avec cependant $k\geqslant A$) : on a
$$\frac{P(T=k+1)}{P(T=k)}=\frac{(k!(A-1)!(k-A)!}{2(A-1)!(k-A+1)!(k-1)!}=\frac{k}{2(k-A+1)}\longrightarrow\frac{1}{2}$$
et ainsi $R_T=2$. Soit $x\in]-R_T,R_T[$, on a
$$\begin{aligned}G_T(x)&=\sum_{k=A}^{+\infty}\frac{k-1}{A-1}\frac{1}{2^k}x^k\\&=\sum_{k=A}^{+\infty}\binom{k-1}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^k\\&=\frac{x}{2}\sum_{k=A-1}^{+\infty}\binom{k}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^k\\&=\frac{x}{2}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{A-1}}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^A}\\&=\left(\frac{x}{2-x}\right)^A\end{aligned}$$

Q36 Ainsi comme $R_T>1$, G_T est dérivable (à gauche) en 1 et on a T qui admet une espérance finie, avec
$$E(T)=G_T'(1)=A\frac{2-x+x}{(2-x)^2}\left(\frac{x}{2-x}\right)^{A-1}(1)=2A$$
Ainsi le nombre moyen de tours pour terminer le jeu est $E(T)=2A$.

Q37 D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements donné et à l'événement $(S_{n+1} \leqslant k)$, on a

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} \leqslant k) &= \sum_{\ell=0}^{M-1} P((S_{n+1} \leqslant k) \cap (X_{n+1} = \ell)).P(X_{n+1} = \ell) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} P((S_{n+1} \leqslant k) \cap (X_{n+1} = \ell)) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} P(S_n \leqslant k - \ell) \end{aligned}$$

De plus, si $\ell \geqslant k+1$, $k - \ell < 0$ et $P(S_n \leqslant k - \ell) = 0$ et ainsi

$$P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k - \ell)$$

Q38 On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ avec la propriété

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!]\,,\ P(S_n \leqslant k) = \frac{1}{M^n}\binom{n+k}{n}.$$

Pour $n = 1$, $S_1 = X_1$ suit la loi uniforme sur $k \in [\![0, M-1]\!]$, et on a si $k \in [\![0, A-1]\!]$,

$$P(S_1 \leqslant k) = \frac{k+1}{M} = \frac{1}{M^1}\binom{1+k}{1}$$

et donc la propriété est vraie au rang 1.
On suppose que la propriété est vraie au rang n, avec $n \geqslant 1$ fixé. Alors d'après la question Q37, on a si $k \in [\![0, A-1]\!]$,

$$P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k - \ell)$$

et ainsi en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M^{n+1}} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{M^n}\binom{n+k-\ell}{n}$$

puis par la relation donnée par l'énoncé, nous obtenons

$$P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M^{n+1}}\binom{n+1+k}{n+1}$$

ce qui achève la récurrence.

Q39 Soit $\omega \in \Omega$, si $T(\omega) > n$, alors par définition de T, $S_n(\omega) < A$, et inversement. Donc $(T > n) = (S_n < A)$. On considère alors la série numérique

$$\sum_{n \geqslant 0} P(S_n < A) = \sum_{n \geqslant 0} P(S_n \leqslant A - 1)$$

c'est à dire en fait

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{M^n}\binom{n+A-1}{n} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{M^n}\binom{n+A-1}{A-1}$$

soit encore en décalant l'indice de sommation

$$\sum_{n \geqslant A-1} \frac{1}{M^{n-A+1}} \binom{n}{A-1} = M^{A-1} \sum_{n \geqslant A-1} \frac{1}{M^n} \binom{n}{A-1}$$

dont on connaît déjà la convergence, avec

$$\sum_{n=A-1}^{+\infty} \frac{1}{M^n} \binom{n}{A-1} = \frac{\frac{1}{M^{A-1}}}{\left(1 - \frac{1}{M}\right)^A}$$

et ainsi d'après le rappel, la variable aléatoire T admet une espérance finie, et on a

$$E(T) = M^{A-1} \frac{\frac{1}{M^{A-1}}}{\left(1 - \frac{1}{M}\right)^A}$$

soit encore

$$E(T) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{M}\right)^A}$$