CCP PC 2022

Q1 Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\varphi(P)$ est le reste dans la division euclidienne de AP par B. Comme $\deg(B) = n+1$, ce reste est de degré inférieur (ou égal) à $\deg(B) - 1 = n$ et ainsi $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

Q2 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, nous avons

$$A(P_1 + \lambda P_2) = AP_1 + \lambda AP_2 = BQ_1 + R_1 + \lambda BQ_2 + \lambda R_2 = B(Q_1 + \lambda Q_2) + R_1 + \lambda R_2$$

avec $Q_1 + \lambda Q_2 \in \mathbb{C}[X]$ et surtout $R_1 + \lambda R_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par unicité, nous pouvons affirmer que le quotient et le reste de la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B sont $Q_1 + \lambda Q_2$ et $R_1 + \lambda R_2$, et donc

$$\varphi(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2 = \varphi(P_1) + \lambda \varphi(P_2).$$

Donc φ est linéaire et ainsi par la question Q1, c'est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

Q3 Nous avons $A.1 = X^2 + 2X = B.0 + X^2 + 2X$ et ainsi

$$\varphi(1) = X^2 + 2X = 2X + 1.X^2$$

On a aussi (pas utile de poser la division) $A.X = X^3 + 2X^2 = (X^3 + X^2 - X - 1).1 + X^2 + X + 1$ et ainsi

$$\varphi(X) = X^2 + X + 1 = 1 + 1.X + 1.X^2$$

Et finalement, on a (on peut aussi poser la division) $A.X^2 = X^4 + 2X^3 = (X^3 + X^2 - X - 1).(X+1) + 2X + 1$ et donc

$$\varphi(X^2) = 2X + 1 = 1.1 + 2.X$$

Ainsi la matrice de φ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ est par définition

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

considérée comme matrice complexe.

Q4 On détermine le polynôme caractéristique de M :

$$\begin{aligned}
\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \qquad C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\
= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 \\ -1 - \lambda & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\
= (\lambda + 1)((\lambda - 1)^2 - 4) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3)
\end{aligned}$$

Ainsi M admet -1 et 3 comme valeurs propres. On détermine alors les espaces propres associés :

$$MX = -X \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \iff x+y+z=0$$
$$\iff z=-x-y \iff (x,y,z)=(x,y,-x-y)=x(1,0,-1)+y(0,1,-1)$$

Ainsi $E_{-1} = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$, de dimension 2. De même

$$AX = 3X \iff \begin{cases} -3x+y+z=0 \\ 2x-2y+2z=0 \\ x+y-3z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+y-3z=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x-z=0 \\ y-2x=0 \end{cases} \iff (x,y,z)=(x,2x,x)=x(1,2,1)$$

et ainsi $E_3 = \mathrm{Vect}((1,2,1)$, droite vectorielle de dimension 1.

Q5 La matrice M de taille 3 est diagonalisable puisque la somme des dimensions des espaces propres est égale à la taille de la matrice. Ainsi l'endomorphisme φ représenté par la matrice M est aussi diagonalisable.

Q6 Nous avons

$$A.1 = X^3.0 + \alpha + \beta X + \gamma X^2$$

et ainsi $\varphi(1) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ d'où la première colonne de T.

$$A.X = \alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3 = X^3.(\gamma) + 0.1 + \alpha X + \beta X^2$$

et donc $\varphi(X) = 0.1 + \alpha X + \beta X^2$ d'où la seconde colonne de T.

$$A.X^2 = \alpha X^2 + \beta X^3 + \gamma X^4 = X^3.(\gamma X + \beta) + 0.1 + 0.X + \alpha X^2$$

d'où $\varphi(X^2) = 0.1 + 0.X + \alpha X^2$ d'où la troisième colonne de T.

Q7 Le spectre de T est réduit à $\{\alpha\}$.
Si φ était diagonalisable, T aussi, T serait semblable alors à αI_3, et donc en fait égale à αI_3 c'est à dire que $\beta = \gamma = 0$ et donc A constant.
Réciproquement, si A est constant, $\beta = \gamma = 0$ et donc $T = \alpha I_3$ ce qui entraîne que T et donc φ diagonalisable.

Q8 Soit $j \in \{0, \dots, n\}$, nous avons

$$D(x_j) = P(x_j) - \sum_{i=0}^{n} P(x_i) \underbrace{L_i(x_j)}_{=0 \text{ si } i \neq j} = P(x_j) - P(x_j) = 0$$

Donc $x_0, \dots, x_n$ sont des racines de D.

Q9 Or P et $L_0, \dots, L_n$ sont de degré inférieurs à n, et donc D aussi. Comme D admet $n+1$ racines au moins, il est nul et donc

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i.$$

Q10 Ainsi la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est génératrice de $\mathbb{C}_n[X]$. Comme elle est de cardinal $n+1$ et que $\dim \mathbb{C}_n[X] = n+1$, on peut affirmer que $(L_0, \dots, L_n)$ est finalement une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q11 Soit $(j,k) \in inter0n^2$. Nous avons $\varphi(L_k) = AL_k = BQ_k + R_k$ avec $\deg(R_k) \leqslant n$. Alors

$$R_k(x_j) = A(x_j)L_k(x_j) - \underbrace{B(x_j)}_{=0} Q_k(x_j) = A(x_j)L_k(x_j) = \begin{cases} A(x_k) & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Q12 D'après la question Q9, nous avons $R_k = \sum_{i=0}^{n} R_k(x_i)L_i$ et ainsi par la question Q11, il reste dans cette somme $R_k = A(x_k)L_k$ soit encore $\varphi(L_k) = A(x_k)L_k$.

Q13 On en déduit que la matrice de φ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ est la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} A(x_0) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A(x_n) \end{pmatrix}$$

et ainsi φ est diagonalisable, et les valeurs propres sont $A(x_0), \dots, A(x_n)$ (non forcément distinctes).

Q14 La série entière géométrique est de rayon 1, de somme $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ si $x \in]-1,1[$.

Q15 Nous avons donc si $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Par dérivation terme à terme de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence, on a alors la série des dérivées qui converge sur $]-1,1[$ avec

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

et ainsi en multipliant par x, la série $\sum_{k \geqslant 0} kx^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Q16 Nous avons soit pile au premier lancer, soit face, et ainsi

$$(L_1 = k) = (P_1 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1}) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1})$$

Q17 Par disjonction,

$$P(L_1 = k) = P(P_1 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1}) + P(F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1})$$

puis par indépendance mutuelle des P_i et F_i

$$P(L_1 = k) = P(P_1) \cdots P(P_k)P(F_{k+1}) + P(F_1) \cdots P(F_k)P(P_{k+1}) = \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} = 2^{-k}$$

Q18 La famille $(L_1 = k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille complète d'événements, et donc on a

$$1 = \sum_{k=0}^{+\infty} P(L_1 = k)$$

et ainsi (somme géométrique)

$$P(L_1 = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1 - 1 = 0$$

comme attendu.

Q19 On étudie la convergence (absolue) de la série à terme positifs $\sum_{k \geqslant 0} kP(L_1 = k)$, c'est à dire $\sum_{k \geqslant 1} k2^{-k}$. D'après la question Q15, pour $x = \frac{1}{2}$, cette série converge (absolument) de somme $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$. Donc L_1 admet une espérance finie, qui est 2.
Cette valeur 2 est ainsi la longueur de la première série que l'on peut espérer (la valeur moyenne).

Q20 Nous avons la variable aléatoire N_1 qui ne prend que la valeur 1 ; c'est une variable aléatoire constante égale à 1 avec $P(N_1 = 1) = 1$.
La variable aléatoire N_2 peut prendre les valeurs 1 et 2 ; on a

$$(N_2 = 1) = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2) \qquad (N_2 = 2) = (P_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap P_2)$$

et donc

$$P(N_2 = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \qquad P(N_2 = 2) = \frac{1}{2}$$

Q21 De manière générale, N_n peut prendre toutes les valeurs $1, \dots, n$:
pour 1, on considère $P_1 \cap \cdots \cap P_n$ par exemple avec 1 série.
pour $n = 2p$, $P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \cdots \cap F_{2p}$ et $n = 2p+1$, $P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \cdots \cap F_{2p} \cap P_{2p+1}$ par exemple avec donc n séries.
pour $1 \leqslant k \leqslant n$, nous pouvons avoir $k-1$ changements et donc k séries.

Q22 Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Alors si $\omega \in (N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}$, $N_{n+1}(\omega) = k$, et on a pile aux coups n et $n+1$; le coup $n+1$ ne donne pas lieu à une nouvelle série, et ainsi en n coups, il y a aussi k série. Donc $N_n(\omega) = k$. Nous avons bien

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} \subset (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}$$

Réciproquement, si $w \in (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}$, $N_n(\omega) = k$, il y a k séries sur les n premiers coups, mais comme les coups n et $n+1$ sont piles, il y a pas de nouvelle série par le coup $n+1$ et ainsi nous avons $N_{n+1}(\omega) = k$. Donc finalement

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}$$

On en déduit que

$$P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = P((N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1})$$

Or P_{n+1} est indépendant de $(N_n = k) \cap P_n$ qui ne concerne que les n premiers lancers, et ainsi

$$P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = P((N_n = k) \cap P_n) P(P_{n+1})) = \frac{1}{2} P((N_n = k) \cap P_n)$$

Q23 On considère le système complet d'événements (c'est clair)

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

dont les probabilités sont toutes de $\frac{1}{4}$ et la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
P(N_{n+1} = k) &= P(N_{n+1} = k \cap P_n \cap P_{n+1}) + P(N_{n+1} = k \cap F_n \cap F_{n+1}) \\
&+ P(N_{n+1} = k \cap F_n \cap P_{n+1}) + P(N_{n+1} = k \cap P_n \cap F_{n+1}) \\
&= \frac{1}{2}(P((N_n = k) \cap P_n) + P((N_n = k) \cap F_n) + P((N_n = k-1) \cap P_n) \\
&+ P((N_n = k-1) \cap F_n) \\
&= \frac{1}{2}P(N_n = k) + \frac{1}{2}P(N_n = k-1)
\end{aligned}$$

Q24 La fonction génératrice est de rayon infini puisque la variable aléatoire prend un nombre fini de valeurs. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} P(N_{n+1} = k)x^k = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k)x^k + \sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k-1)x^k\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)x^k + x\sum_{k=0}^{n} P(N_n = k)x^k\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(G_n(x) + xG_n(x)\right) = \frac{1+x}{2}G_n(x)
\end{aligned}$$

puisque $P(N_n = k+1) = 0 = P(N_n = 0)$.

Nous avons en particulier $G_1(x) = P(N_1 = 1)x = x$.

Q25 Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, nous obtenons pour tout x réel

$$G_n(x) = \frac{x}{2^{n-1}}(1+x)^{n-1}$$

(polynomiale de degré n).

Q26 On a puisque N_n prend un nombre fini de valeurs, N_n d'espérance finie avec

$$E(N_n) = G_n'(1) = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Q27 On a

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)x^k = \frac{x}{2^{n-1}}(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{n-1}{k}}{2^{n-1}}x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^{n-1}}x^k$$

et ainsi par unicité des coefficients polynomiaux, on a

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}\,,\; P(N_n = k) = \frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{k-1}$$

Q28 Nous avons

$$\begin{aligned}
\Delta_n = u_n - u_{n-1} &= \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) \\
&= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\sim -\frac{1}{2n^2}
\end{aligned}$$

Q29 Ainsi Δ_n de signe constant à partir d'un certain rang, et comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 2} \Delta_n$ aussi par comparaison par équivalence (signe constant).

Q30 On en déduit le résultat par propriété de télescopage : on a si $N \geqslant 2$,

$$\sum_{n=2}^{N} \Delta_n = \sum_{n=2}^{N} u_n - u_{n-1} = u_N - u_1$$

et ainsi u_N admet une limite lorsque N tend vers $+\infty$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente.

Q31 Soit $t \in]0, +\infty[$, si $n \geqslant [t] + 1 = n_0$, $n > t$, et ainsi

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t).$$

Q32 Or

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-t/n)}$$

et sachant que $\ln(1 + u) \sim_0 u$ et que $-t/n \longrightarrow 0$,

$$n\ln(1 - t/n) \sim n \times (-t/n) = -t$$

et donc

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-t/n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t}$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \mathrm{e}^{-t}\ln(t).$$

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Q33 Soit $t > 0$, on a si $t \geqslant n$, $|f_n(t)| = 0 \leqslant \mathrm{e}^{-t}|\ln(t)|$ et sinon

$$|f_n(t)| = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n |\ln(t)|$$

avec

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-t/n)}$$

Or sachant que $\ln(1 + u) \leqslant u$, on a $\ln(1 - t/n) \leqslant -t/n$ puis $n\ln(1 - t/n) \leqslant -t$ et ainsi par croissante de l'exponentielle

$$|f_n(t)| = \mathrm{e}^{-t}|\ln(t)|$$

Finalement, pour tout $t >$, on a

$$|f_n(t)| = \mathrm{e}^{-t}|\ln(t)|$$

Q34 Déjà, $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ est continue sur $]0, +\infty[$. Comme $\mathrm{e}^{-t}\ln(t) \sim_0 \ln(t)$ et que $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable en 0, $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ est intégrable en 0. On a aussi

$$\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}.\mathrm{e}^{-t}\ln(t) = \mathrm{e}^{\frac{-t}{2}}\ln(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et ainsi

$$\mathrm{e}^{-t}\ln(t) = \mathrm{o}_{+\infty}\,\mathrm{e}^{\frac{-t}{2}}$$

et donc $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ est intégrable en $+\infty$.
Finalement, on a bien $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q37 On considère l'intégrale généralisée $J_n = \displaystyle\int_0^1 u^n \ln(1-u)\mathrm{d}u$. On pose

$$\begin{cases} f'(u) & = u^n \\ g(u) & = \ln(1-u) \end{cases} \qquad \begin{cases} f(u) & = \frac{1}{n+1}(u^{n+1}-1) \\ g'(u) & = -\frac{1}{1-u} \end{cases}$$

avec donc f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$. On a

$$f(u)g(u) = \frac{1}{n+1}(u^{n+1}-1)\ln(1-u) \underset{0}{\sim} -\frac{u^{n+2}}{n+1} \xrightarrow[u\to 0]{} 0$$

et

$$f(u)g(u) = \frac{1}{n+1}(u^{n+1}-1)\ln(1-u) \underset{1}{\sim} (u-1)\ln(1-u) \xrightarrow[u\to 1]{} 0$$

sachant que

$$u^{n+1}-1 = (u-1)(1+u+u^2+\cdots+u^n) \qquad \lim_{v\to 0} v\ln(v) = 0$$

Ainsi d'après le théorème d'intégration par parties généralisé, les deux intégrales

$$J_n = \int_0^1 u^n \ln(1-u)\mathrm{d}u \qquad \int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u$$

sont de même nature. Or comme

$$\frac{u^{n+1}-1}{u-1} = \sum_{k=0}^{n} u^k$$

la seconde est convergente, et on a

$$J_n = \int_0^1 u^n \ln(1-u)\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 u^k\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$$

Q38 On effectue le changement de variable $u = \frac{n-t}{n}$, $n\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, dans l'intégrale '$I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\mathrm{d}t$, nous avons $t \mapsto \dfrac{n-t}{n}$ de classe $\mathcal{C}^1$, bijective, strictement décroissante de $]0,n[$ sur $]0,1[$, et ainsi

$$I_n = -\int_0^1 u^n \ln(n(1-u))(-n)\mathrm{d}u = n\int_0^1 u^n[\ln(n)+\ln(1-u)]\mathrm{d}u$$

et en séparant (les intégrales convergent)

$$I_n = n\ln(n)\int_0^1 u^n\mathrm{d}u + nJ_n = \frac{n}{n+1}\ln(n) + nJ_n$$

Q39 En appliquant le théorème de convergence de dominée pour la suite de fonctions (f_n), et la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ étant intégrable,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$$

et ainsi

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} I_n$$

Or on a

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{n}{n+1}\ln(n) + nJ_n \\
&= \frac{n+1-1}{n+1}\ln(n) - \frac{n+1-1}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right] \\
&= \ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}\ln(n) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} \\
&\longrightarrow -\gamma
\end{aligned}$$

et ainsi on en déduit finalement la forme intégrale de la constante d'Euler γ

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t.$$