I PC CCP énoncés

Exercice 1.

I) Montrer que Φ, qui à P associe $Q(X) = (X+2)P(X) - XP(X+1)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in \operatorname{Ker}\Phi$, calculer $P(0)$ et $P(-1)$.
Montrer que $\exists R \in \mathbb{R}[X]$, $P(X) = X(X+1)R(X)$ et $R(X) = R(X+1)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $R(k) - R(0)$ et en déduire que R est une constante.
Trouver $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$ (on pourra utiliser la matrice de Φ dans la base canonique).
Déterminer le spectre de Φ ; est-il diagonalisable ?

II) Calculer la limite de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.
Calculer $I_n + I_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$;

Exercice 2.

I) Résoudre $\sin((2n+1)\theta) = 0$, $\theta \in]0, \pi/2[$; montrer que

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{2n+1} &= \cos((2n+1)\theta) + i\sin((2n+1)\theta)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k}(-1)^k \cos^{2n+1-2k}\theta \sin^{2k}\theta\\ &+ i\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k \cos^{2n-2k}\theta \sin^{2k+1}\theta\end{aligned}$$

(après avoir développé, on pourra séparer les termes pairs et les termes impairs).
Montrer $\exists! P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, $P_n\left(\frac{1}{\tan^2\theta}\right) = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin^{2n+1}\theta}$ et expliciter P_n.
Trouver les racines de P_n, leur produit, leur somme.

II) Pour $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $f(x,y) = g\left(\frac{x}{y}\right)$.
Montrer que si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{y}{x^2}$, g vérifie une équation différentielle que l'on explicitera ; en déduire f et g.

Exercice 3.

I) Montrer que $f(x,y) = (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
Déterminer les points critiques de f. On pose

$$P(t) = \left(t\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(t\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2$$

Montrer que P est un polynôme de degré 2 et calculer son discriminant Δ. En déduire que f admet un minimum global. On pose

$$g(x_1,\dots,x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)$$

En s'inspirant de la question précédente, montrer que $g(x_1,\dots,x_n) \geqslant n^2$ et trouver au moins un n-uplet vérifiant l'égalité.
Montrer que

$$g(x_1,\dots,x_n) = n + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}\right)$$

et en déduire une nouvelle méthode pour montrer le résultat précédent.

II) On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5} I_n$ et en déduire que

$$I_n = (2^{n+1}n!)^2\frac{n+1}{(2n+3)!}$$

Exercice 4.

I) On donne

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

de taille n. Montrer que si $n \geqslant 2$, $D_{n+2} = 3D_{n+1} - 2D_n$. Calculer D_n en fonction de n.

II) Donner les variations de $\Phi(x) = -x\ln x$ sur $]0,1[$ et montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on pose $p_n = P(X=n) \neq 0$.
Lorsque $\sum \Phi(p_n)$ converge, on dit que X admet une entropie $H(X) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Phi(p_n)$.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$ et en déduire que $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant -\sqrt{p_n}\ln p_n \leqslant 1$.
Montrer que si X suit une loi géométrique, elle admet une entropie et la calculer.
Dans le cas général, on suppose que X admet une espérance ; montrer, à l'aide de l'inégalité établie que $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geqslant n_0$, $\Phi(p_n) \leqslant \max\left\{\frac{1}{n^{3/2}}, 3p_n\ln n\right\}$.
Montrer que X admet une entropie.

Exercice 5.

I) On donne $u_0 \in]-1,0[$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.
Étudier les variations de $f(x) = x^2 + x$ et montrer que $\forall x \in]-1,0[,\ f(x) \in]-1,0[$.
Montrer que la suite (u_n) est une suite de $]-1,0[$, en déduire que (u_n) converge et donner sa limite.
Conclure à la convergence de $\sum u_n^2$ et donner sa somme en fonction de u_0.
Étudier $\sum (-1)^n u_n$.
Montrer que la suite de terme général $a_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$ converge et donner sa limite ℓ.
On admet que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ tend vers ℓ (lemme de Césaro). En déduire un équivalent de u_n et la nature de $\sum u_n$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \ell$$

II) Donner une base orthonormale de $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\,,\ z = 0\,,\ x+y+t = 0\}$.
Expliquez comment obtenir la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 6.

I) Dans $E = \mathbb{R}_5[X]$, on pose $I(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.
Pour $0 \leqslant k \leqslant 5$, $I(X^k)$ est-elle absolument convergente ? $I(P)$ converge-t-elle ?
On admet que $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, tel que $I(P) = aP\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + bP(0) + cP\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Calculer $I(X)$ et en déduire une relation entre a, b et c.
On donne $I(X^2) = \frac{\pi}{2}$; donner les valeurs de a, b et c.
Donner une relation de récurrence entre $I(X^{k+1})$ et $I(X^k)$ puis conclure.
II) La matrice $B = A^T A$ avec $A \in \mathcal{M}_{5,10}(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ?
Admet-elle 0 pour valeur propre ?

Exercice 7.

I) Montrer que, pour $q \geqslant 2$, 1 est racine de de $Q(X) = qX^q - \sum_{k=0}^{q-1} X^k \in \mathbb{C}[X]$.
Montrer que $R(X) = (X-1)Q(X) = qX^{q+1} - (q+1)X^q + 1$.
Montrer que z racine de Q complexe, vérifie $q|z|^q \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$ et en déduire que $|z| \leqslant 1$ (on pourra raisonner par l'absurde et comparer $|z|^k$ et $|z|^q$ pour $k \in [\![0, q-1]\!]$).
On suppose alors que si $|z| = 1$, alors $z = 1$; sinon $|z| < 1$.
Montrer que R' est factorisable en produit de polynôme de degré 1 et en déduire que 1 est racine double de R. Montrer que les autres racines de R sont simples.
Soit A une matrice complexe, diagonalisable d'ordre n et dont le spectre est inclus dans l'ensemble des racines complexes de Q ; montrer que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projection.
Montrer que si $|z| = 1$, alors $z = 1$ ou sinon $|z| < 1$.

II) Convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$.

Exercice 8.

I) Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} \mathrm{d}t$$

converge pour $\alpha > 1$.
Montrer que $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ converge ainsi que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ (on pourra faire une intégration par parties).
Montrer que $\Phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} \mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis exprimer $\Phi'(x)$ sous forme d'une intégrale ; expliciter $\Phi'(0)$.
On admet que Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\Phi''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \mathrm{d}t$$

avec $f(x,t) = \dfrac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}$; calculer $\Phi''(x) - \Phi(x)$.
Calculer explicitement $\Phi''(x)$, $\Phi'(x)$ et $\Phi(x)$.

II) Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer A^2.

On pose $S = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et $B = 2A - SI_n$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible puis calculer B^{-1}.

Exercice 9.

I) Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$ diverge pour $p=0$ et $p=1$.
On suppose que $p \geqslant 2$. Montrer que $(n+p+1)u_{n+1} = (n+1)u_n$ et en déduire que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1-(n+1)u_n}{p-1}$.
Montrer que la suite de terme général $v_n = (n+1)u_n$ est décroissante.
Montrer que la série de terme général u_n converge.
Montrer que (v_n) tend vers 0 et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} u_k$.

II) L'ensemble E des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a+c & -b & c \\ b & a+2c & -b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est-il un espace vectoriel ? Si oui, préciser sa dimension et une base.

Exercice 10.

I) Montrer que $X^2 - 2\cos(t)X + 1 = (X - \mathrm{e}^{it})(X - \mathrm{e}^{-it})$. Montrer que les racines de $X^{2n}-1$ sont les $\mathrm{e}^{ik\pi/n}$, $-n+1 \leqslant k \leqslant n$ et en déduire que

$$(X-1)(X^{2n}-1) = (X+1)\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X + X^2\right).$$

Montrer que, pour $|a|<1$, $f_a(x) = \ln(1 - 2a\cos x + a^2)$ est définie et continue sur $[0,\pi]$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_a\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \ln\frac{(a-1)(a^{2n}-1)}{a+1}$.
Calculer $I(a) = \int_0^\pi f_a(x)\mathrm{d}x$. On pourra utiliser une somme de Riemann.
Montrer que $\ln(\sin^2 x)$ et $\ln(1-\cos x)$ sont intégrables sur $]0,\pi[$ et calculer $I = \displaystyle\int_0^\pi \ln(1-\cos x)\mathrm{d}x$.

II) Quel est le rang de $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \end{pmatrix}$? Montrer que tout vecteur propre de A associé à une valeur propre non nulle est dans l'image de A. Calculer les valeurs propres de A et donner les sous-espaces propres associés ; est-elle diagonalisable ?

Exercice 11.

I) Soient deux réels a et b tels que $1+a<b$ et une suite de réels u_n positifs tels que $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+a}{n+b}$. Donner, sous sa forme la plus simple possible, un équivalent de $\ln \dfrac{n+a}{n+b}$ au voisinage de $+\infty$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\ln\frac{u_{k+1}}{u_k}=-\infty$ et en déduire que (u_n) tend vers 0.

On pose $\alpha=b-a$, $v_0=u_0$ et $v_n=n^\alpha u_n$; montrer que $\displaystyle\sum\ln\frac{v_{k+1}}{v_k}$ converge.

Montrer qu'il existe un réel A tel que $u_n\sim\frac{A}{n^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$.

Étudier la convergence de $\sum u_n$.

II) $A=\begin{pmatrix} x & y\\ x & y\end{pmatrix}$ peut-elle être inversible ? À quelle(s) condition(s) sur x et y représente-t-elle un projecteur non nul ?

Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent une loi binomiale de paramètre n et p.

Quelle est la probabilité que $A(\omega)=\begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega)\\ X(\omega) & Y(\omega)\end{pmatrix}$ soit inversible ?

Quelle est la probabilité pour que ce soit un projecteur non nul ?

Exercice 12.

I) Soient s une symétrie distincte de $\pm$id d'un espace E de dimension n et Φ défini sur $\mathcal{L}(E)$ par $\Phi(f)=\frac{1}{2}(s\circ f+f\circ s)$. Calculer $\Phi(Id)$ et $\Phi(s)$.

Montrer que Φ est un endomorphisme.

Donner une relation entre E et les sous-espaces propres E_1 et E_{-1} de s, associés aux valeurs propres 1 et -1.

Montrer que $f\in\operatorname{Ker}\Phi\iff f(E_1)\subset E_{-1}$ et $f(E_{-1})\subset E_1$.

Soit f un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ ; donner, pour $x\in E_1$ puis pour $x\in E_{-1}$, une relation entre $f(x)$ et $s\circ f(x)$.

Montrer qu'il existe f non nul tel que $f(E_1)\subset E_{-1}$ et $f(E_{-1})\subset E_1$.

Montrer que les valeurs propres de Φ sont -1, 0 et 1.

II) Limite de la suite de terme général $u_n=\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$. Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n$.

Exercice 13.

I) On donne f_0 continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on pose

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Donner le rayon de convergence et la somme de $\sum \frac{x^n}{n!}$.
Montrer que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer f_1'. Montrer que pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^n$.
On admet

$$(*) \qquad \forall a > 0\,,\ \exists K \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ |x| \leqslant a \Longrightarrow |f_n(x)| \leqslant \frac{K|x|^n}{n!}.$$

Montrer que $F(x) = \sum_{n \geqslant 1} f_n(x)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $F' - F = f_0$ et que

$$F(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x f_0(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

II) Une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\geqslant 1}$ suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.
Calculer $E(S_n)$, $V(S_n)$ et montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Exercice 14.

I) Montrer que T définie sur l'espace E des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par $t(f)(0) = f(0)$ et $T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est linéaire.
Montrer que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $xt(f)'(x) + T(f)(x) = f(x)$.
Montrer que $T(f)$ est continue en 0 et que c'est un endomorphisme de E.
Montrer que 0 n'est pas valeur propre de T.
Soit λ une valeur propre de T, de vecteur propre associé f ; montrer que f est solution de $y' - \frac{1-\lambda}{\lambda x}y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire que le spectre de T est $]0,1]$.
II) Donner le laplacien de $f(x,y) = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$ où Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15.

I) Montrer que la suite de terme général $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ est décroissante.
On admet que $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}a_n$; montrer que la suite de terme général $n(n+1)(n+2)a_na_{n-1}$ est constante.
Sachant que $a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$, montrer que $a_{n+1} \sim a_n$ au voisinage de $+\infty$.
Prouver qu'il existe $K > 0$ tel que $a_n \sim \frac{K}{n^{3/2}}$.
Montrer que $\displaystyle\sum a_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\mathrm{d}t$ et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\mathrm{d}t$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{\pi}{2} - 1$. Montrer que $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}a_n$.
II) Montrer que l'ensemble E des $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(0) = P'(0) = 0$, est un sous-espace vectoriel dont on donnera une base.
Trouver un isomorphisme entre E et $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

Exercice 16.

I) Montrer que $\forall x > 0$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
Montrer que

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{Arctan}(x\tan t)\mathrm{d}t$$

est définie, impaire continue et croissante sur $\mathbb{R}$ puis de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f' sous forme d'intégrale.
Justifier que

$$\frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{u}{x^2+u^2}\mathrm{d}u$$

(on pourra faire le changement de variable $u = x\tan t$) ; f est-elle dérivable en 0 ? Montrer que

$$\forall x > 0\,,\ f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

II) Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \mathrm{e}^{ipt}$ et simplifier l'expression obtenue.