Devoir n°1

Exercice 1 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et l'équation pour $x \geqslant 0$,

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1 \qquad (E_n)$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$.

1. Montrer que l'équation (E_n) possède une unique solution que l'on notera x_n. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. dans $\mathbb{R}_+$ et que l'on a $x_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Préciser x_1.

2. Montrer que la suite (x_n) est monotone. On pourra utiliser $f_{n+1}(x_n)$.

3. En déduire que la suite (x_n) est convergente.

4. Déterminer la limite ℓ de la suite (x_n). On montrera que si $n \geqslant 2$, on a
$$2x_n - 1 = x_n^{n+1}$$
4) Déterminer un équivalent simple de $(x_n - \ell)$; c'est plus difficile, on trouvera
$$x_n - \frac{1}{2} \sim \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$$

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$.

1. Représenter la suite (u_n). Que peut-on conjecturer ?
2. Montrer que $]0,+\infty[$ est stable par f. En déduire que la suite (u_n) est bien définie.
3. Montrer que la fonction f admet un unique point fixe ℓ que l'on précisera.
4. Exprimer $u_{n+1}-\ell$ en fonction de $u_n-\ell$ pour tout entier n et en déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; |u_{n+1}-\ell| \leqslant \frac{1}{4}|u_n-\ell|$$
Montrer aussi que $u_{n+1}-\ell$ est de signe opposé au signe de $u_n-\ell$.
5. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; |u_n-\ell| \leqslant \frac{1}{4^n}|u_0-\ell|$$
et conclure.
6. Dans cette question, on propose une autre méthode, plus générale, sous forme guidée. On suppose que $u_0 \neq \ell$.
   (a) On considère ici f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Montrer que f admet deux points fixes noté ℓ donc et ℓ'. Nous allons exploiter ce second point fixe.
   (b) On pose pour tout entier n, $v_n = \frac{u_n-\ell'}{u_n-\ell}$. Justifier que la suite (v_n) est bien définie, ne s'annule pas, et exprimer v_{n+1} à l'aide de v_n (on utilisera la question 4). On trouvera
   $$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; v_{n+1} = qv_n$$
   avec q à préciser. On trouvera $q = \frac{\ell'}{\ell} < -1$.
   (c) En déduire v_n pour tout entier n puis u_n en fonction de q, ℓ et v_0.
   (d) Retrouver la limite de la suite (u_n).