Quinzaine 1 du 16/09 au 27/09

N.B. : tout n'a pas été revu forcément, veuillez vous référer aussi à votre cours de première année.

Révision 1 : Révision analyse asymptotique
Comparaison des suites : relation de domination, de négligeabilité, d'équivalence (définition à partir du quotient). Notations.
Croissance comparée de $\ln^{\beta}(n)$, n^{α} et $\mathrm{e}^{\gamma n}$.
Liens entre les relations de comparaison. Opérations sur les équivalents.
Conservation du signe et de la limite par équivalent.

Comparaison des fonctions : adaptation aux fonctions des définitions et résultats en un point ou à l'infini.

Développement limité de f au voisinage de a point ou extrémité d'un intervalle I. Cas où f est définie sur $I \setminus \{a\}$.

Unicité, troncature d'un développement limité.
Forme normalisée $f(a+h) =_{h\to 0} h^p(a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \mathrm{o}(h^n))$ et intérêt pour prévoir l'ordre d'un développement limité.
Équivalence $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0 h^p$, et signe.
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.
Développement limité d'une composée sur des exemples.
Primitivation d'un développement limité.
Formule de Taylor-Young.
Développement à tout ordre au voisinage de 0 de

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}, \exp, \sin, \cos, x \mapsto (1+x)^{\alpha}, x \mapsto \ln(1+x), x \mapsto \operatorname{Arctan} x$$

Développement de tan à l'ordre 3.

Application à l'étude locale d'une fonction (prolongement par continuité, dérivabilité d'un prolongement par continuité, tangente, position relative de la courbe et de la tangente, extremum) ; exemple de $\dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)} - \dfrac{1}{x}$ en 0 (*).
Application à l'étude des asymptotes, à la recherche d'équivalent pour les fonctions et les suites. Exemple de développement limité d'une réciproque : $x \mapsto x \operatorname{ch} x$ en 0.
Développement limité de la fonction tan par utilisation de la formule $\tan' = 1 + \tan^2$ (*).
Développement de $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$ dans les cas $\alpha = \frac{1}{2}$ (*)et $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Révision 2 : Suites
Suites arithmétiques ; suites géométriques ; suites arithmético-géométriques : résolution par la méthode du point fixe (*) ou résolution par calcul des premiers termes (et éventuellement récurrence).

Suites définies par u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Intervalle stable. Généralités. Cas où f est croissante. Cas où f décroissante. Les étudiants doivent savoir représenter une telle suite. Utilisation d'une

majoration (géométrique) du type $|u_{n+1} - \ell| \leqslant k|u_n - \ell|$ lorsque $0 \leqslant k < 1$. Obtention directe ou par le théorème des accroissements finis. Exemple avec la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.
Exemple de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

Chapitre 1 : *Séries numériques*
Série à termes réels ou complexes ; sommes partielles ; convergence ou divergence ; somme et restes en cas de convergence. Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Divergence grossière.

Contre exemple de la série harmonique avec méthodologie particulière : $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$ (*).

Une suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge. Série télescopique.

Séries à termes positifs. Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles qui est croissante est majorée.
Théorème de comparaison. Exemple de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ par comparaison à $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$ et décomposition en éléments simples et télescopage (*).

Questions de cours :
- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.