Devoir surveillé n°1
2 heures

Exercice 0

Soit $x \in \mathbb{R}$, déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Exercice 1

On pose sur $]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0, que l'on déterminera.
2. En déduire que l'on peut prolonger f en 0 en une fonction dérivable en 0 que l'on notera encore f. Quelle est l'équation de la tangente de ce prolongement en 0 ?
3. Donner un équivalent de $f(x)$ en 0.
4. Préciser la position de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0 et en faire une représentation graphique.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On considère l'application u de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ définie par $u(M) = AM$ où $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou des complexes.

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
3. Déterminer le noyau de u en résolvant $u(M) = AM = 0$.
4. Quel est le rang de u ?

Exercice 3

On pose $D_1 = 5$ et si $n \geqslant 2$,

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & & (0) \\ 2 & 5 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 3 \\ (0) & & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

la matrice étant de taille n.

1. Montrer que si $n \geqslant 3$,

   $$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

   On pourra commencer par développer D_n selon la première colonne.

2. Choisir D_0 de sorte que la relation soit encore vraie.
3. En déduire la valeur de D_n pour tout entier n.

Exercice 4

On tire au hasard un nombre X dans $\{0, \dots, n\}$ puis au hasard un nombre Y dans $\{0, \dots, X\}$.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
2. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y ?
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

Exercice 5

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos(x) = \sin(2x)$$

Exercice 0

Soit x réel, n entier naturel, nous avons

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

et on sait que

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \sim \frac{x}{n}$$

et donc

$$n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \sim x$$

Ainsi

$$n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$$

et par composition des limites,

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^x.$$

Exercice 1

1. On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}_0(x^5)$$

et ainsi

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\mathrm{o}_0(x^4)\right)}$$

et comme

$$\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+u^3+u^4+\mathrm{o}_0(u^4)$$

en composant (ordre 4) sachant que pour

$$u = \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} = \frac{x^2}{6}\left(1-\frac{x^2}{20}\right)$$

on a

$$u^2 = \frac{x^4}{36} + \mathrm{o}_0(x^4) \qquad u^3 = \mathrm{o}_0(x^4) \qquad u^4 = \mathrm{o}_0(x^4)$$

on obtient

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\mathrm{o}_0(x^4)} = 1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+\frac{x^4}{36}+\mathrm{o}_0(x^4) = 1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{120}+\mathrm{o}_0(x^4)$$

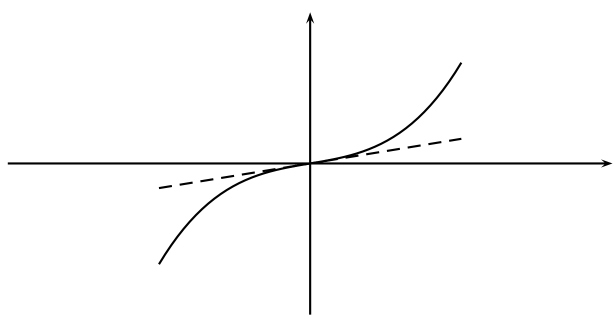
et ainsi

$$f(x) = \frac{x}{6}+\frac{7x^3}{120}+\mathrm{o}_0(x^3)$$

2. On en déduire que l'on peut prolonger f en 0 en une fonction dérivable en 0 avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{1}{6}$, l'équation de la tangente de ce prolongement en 0 étant $y = \frac{x}{6}$.
3. Un équivalent de $f(x)$ en 0 est ainsi $\frac{x}{6}$.
4. Nous avons

$$f(x)-\frac{x}{6} = \frac{7x^3}{120}+\mathrm{o}_0(x^3) \sim \frac{7x^3}{120}$$

du signe de x au voisinage de 0, d'où l'allure locale très exagérée (au vu du terme 120) :



Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On considère l'application u de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ définie par $u(M) = AM$ où $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou des complexes.

Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a

$$\begin{aligned} u(\lambda M+\mu N) &= A(\lambda M+\mu N) = \lambda AM+\mu AN \\ &= \lambda u(M)+\mu u(N) \end{aligned}$$

Ainsi l'application u est linéaire. On détermine alors la matrice de u dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, base que l'on note classiquement $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$

où $E_{i,j}$ est la matrice dont les coefficients sont nuls sauf à la position (i, j) où il vaut 1. On a

$$u(E_{1,1}) = AE_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + E_{2,1}$$

et

$$u(E_{1,2}) = AE_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{1,2} + E_{2,2}$$

et

$$u(E_{2,1}) = AE_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1}$$

et finalement

$$u(E_{2,2}) = AE_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,1}$$

Ainsi la matrice de u dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On détermine le noyau de u. On a

$$\begin{aligned} u(M) = 0 \iff AM = 0 \iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = 0 \\ \iff & \begin{pmatrix} x + z & y + t \\ x & y \end{pmatrix} = 0 \\ \iff & \begin{cases} x = y = 0 \\ z = t = 0 \end{cases} \iff M = 0 \end{aligned}$$

et ainsi $\mathrm{Ker}(u) = \{(0)\}$. Ainsi u est injective, linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sur lui même, c'est donc un automorphisme et son rang est 4.

Autre méthode. En déplaçant les lignes, on voit que

$$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

et ainsi la matrice est inversible et u est de rang 4.
Exercice 3

On a $D_1 = 5$, $D_2 = 19$ et pour $n \geqslant 3$, on développe selon la première ligne

$$D_n = 5D_{n-1} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & & (0) \\ 0 & 5 & 3 & \ddots & \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ (0) & & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n-1}$$

et en développant le second déterminant selon la première colonne

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

Ainsi, la suite $(D_n)_{n \geqslant 1}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 de polynôme $P = X^2 - 5X + 6$, dont les racines sont 3 et 2. On pose $D_0 = 1$ de sorte que $D_2 = 5D_1 - 6D_0$. Ainsi on peut écrire

$$D_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$$

avec $D_0 = 1 = \lambda + \mu$ et $D_1 = 5 = 2\lambda + 3\mu = 2(\lambda + \mu) + \mu$. Ainsi $\mu = 3$ et $\lambda = -2$. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}}$$

Exercice 4

1. La variable aléatoire X suit donc la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.
2. Comme X peut prendre les valeurs entières de 0 à n, la variable aléatoire Y a pour ensemble image $\{0, \dots, n\}$.
3. Nous avons un système complet d'événements

$$((X = 0), (X = 1), (X = 2), \dots, (X = n))$$

Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a par les probabilités totales

$$\begin{aligned}
P(Y = k) &= \sum_{i=0}^{n} P_{(X=i)}(Y = k)P(X = i) \\
&= \sum_{i=k}^{n} P_{(X=i)}(Y = k)P(X = i) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{i=k}^{n} P_{(X=i)}(Y = k) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i+1}
\end{aligned}$$

Exercice 5

Soit $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\cos(x) = \sin(2x) &\iff \cos(x) = \cos(2x - \pi/2) \\
&\iff x = 2x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -2x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
&\iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}
\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$.