Devoir en temps libre n°2

Pour $x \geqslant 0$, on pose pour tout entier naturel n non nul

$$f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$$

et on considère la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$.

1. Montrer que la série de fonction $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On note f sa somme. Rappeler sans justification la valeur de $f(0)$.
2. La convergence de $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ est-elle normale sur $[0, +\infty[$? sur $[a, b]$ avec $0 \leqslant a < b$?
3. Montrer que la convergence de la série de fonction est en fait uniforme sur $[0, +\infty[$. Que peut-on alors en déduire sur f ? (On énoncera avec soin le théorème utilisé).
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$. On donnera deux méthodes.
5. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et exprimer $f'(x)$ pour $x \geqslant 0$. Déterminer les variations de f.
6. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ et exprimer $f^{(p)}(x)$ pour $x \geqslant 0$ et $p \in \mathbb{N}$.
7. Quel est le signe de f'' ? Conclusion ?
8. Montrer que si $x \geqslant 0$, on a
$$f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x+1} \qquad (E)$$
9. Déterminer $f(n)$ pour tout entier naturel n.
10. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$ (on pourra utiliser (E) ainsi que la monotonie de f).
11. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En séparant (en justifiant) les termes d'indices pairs des termes d'indices impairs, calculer
$$f'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$
12. Tracer la courbe représentative de f en mettant en valeur tout les propriétés établies.