Quinzaine 3 du 14/10 au 08/11

Chapitre 1 : *Séries numériques*
Pour une fonction continue et monotone positive, encadrement des sommes partielles de la série $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles (intégrales) ; diverses situations (f définie sur $[0, +\infty[$ ou sur $[1, +\infty[$), divers encadrements. Application aux séries de Riemann. Détermination d'un équivalent du reste d'ordre n dans le cas de convergence. Détermination d'un équivalent de la somme partielle dans le cas de divergence. On a (*)

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n$$

et aussi si $\alpha < 1$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$$

et si $\alpha > 1$,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Chapitre 2 : *Suites et séries de fonctions*
Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions (interversion limite-dérivée) :
si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite (f_n') converge uniformément sur I vers h, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = h$.
Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I ou d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Les étudiants peuvent appliquer directement le théorème concluant au caractère $\mathcal{C}^k$ de la limite sous l'hypothèse de convergence simple des $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ sur tout segment de I ou d'autres intervalles adaptés à la situation.
Remarques sur le fait que la connaissance dans les cas pratiques de la limite simple f nous exempte de l'utilisation de ces théorèmes pour la continuité et dérivalibilité, mais que par contre, dans le cas des séries de fonctions, la fonction somme sera le plus souvent inconnue et que ces théorèmes dans leur version séries de fonctions seront indispensables pour l'étude des propriétés de la fonction somme.

Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions. Pour établir la convergence normale de $\sum f_n$, les étudiants doivent savoir utiliser une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ majorante, c'est à dire telle que pour tout n, $\| f_n \|_\infty \leqslant \alpha_n$.
La convergence normale entraîne la convergence uniforme (*). La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point.

Régularité de la somme d'une série de fonctions.
Continuité de la somme : si $\sum f_n$ converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.
Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I ou d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de la double limite : si $\sum f_n$ converge uniformément sur I de somme f et si pour tout n, f_n admet un limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ell_n$ converge et on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Intégration terme à terme d'une série de fonctions : soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ alors la série des intégrales est convergente et on a :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$$

Dérivation terme à terme d'une série de fonctions : soit (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$. Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I ou d'autres intervalles adaptés à la situation.

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Les étudiants peuvent appliquer directement un théorème concluant au caractère $\mathcal{C}^k$ de la somme, avec la convergence simple des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n^{(i)}$ pour $0 \leqslant i \leqslant k-1$ et la convergence uniforme (ou uniforme sur tout segment de I ou d'autres intervalles adaptés à la situation) de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$.

Exemple des fonctions

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\ ,\ \eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

Utilisation du critère spécial des séries alternées pour la majoration en module d'un reste.

Chapitre 3 : *Séries entières*

Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.

Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente (*).

Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

Pour $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument, et pour $|z| > R$, diverge grossièrement.

Commentaires : les élèves doivent pouvoir exploiter les informations suivantes :

$(a_n z_0^n)$ bornée ; $(a_n z_0^n)$ non bornée ; $\sum a_n z_0^n$ convergente ; $\sum a_n z_0^n$ divergente ; $\sum a_n z_0^n$ absolument convergente mais divergente ; $\forall z$ avec $|z| < r$, la suite $(a_n z^n)$ bornée ou $\sum a_n z^n$ convergente ; et autres, en termes de conséquences sur le rayon.

Disque ouvert de convergence, intervalle de convergence (et cercle d'incertitude)

Si R_a est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R_b celui de $\sum b_n z^n$, alors :

si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ ou si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$

si $|a_n| \sim |b_n|$ ou $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Utilisation de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon. La limite du rapport $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ peut être directement utilisée.

Les élèves doivent savoir utiliser, en adaptant, la règle de d'Alembert pour les séries lacunaires, par exemple de la forme $\sum b_n z^{2n}$ et $\sum b_n z^{2n+1}$.

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence. Rayon de convergence d'une série dérivée.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum n^\alpha z^n$ est de rayon 1.
Rayon de convergence de la somme de deux séries entières (*).
Produit de Cauchy de deux séries entières. Rayon de convergence du produit de Cauchy de deux séries entières.

Questions de cours :

— Les énoncés des définitions, des théorèmes.
— Les démonstrations marquées par (*).
— Les méthodes usuelles sur des exemples.