Devoir en temps libre n°2

Pour $x \geqslant 0$, on pose pour tout entier naturel n non nul

$$f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$$

et on considère la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On note f sa somme. Rappeler sans justification la valeur de $f(0)$.
2. La convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ est-elle normale sur $[0, +\infty[$? sur $[a, b]$ avec $0 \leqslant a < b$?
3. Montrer que la convergence de la série de fonction est en fait uniforme sur $[0, +\infty[$. Que peut-on alors en déduire sur f ? (On énoncera avec soin le théorème utilisé).
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$. On donnera deux méthodes.
5. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et exprimer $f'(x)$ pour $x \geqslant 0$. Déterminer les variations de f.
6. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ et exprimer $f^{(p)}(x)$ pour $x \geqslant 0$ et $p \in \mathbb{N}$.
7. Quel est le signe de f'' ? Conclusion ?
8. Montrer que si $x \geqslant 0$, on a
$$f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x+1} \qquad (E)$$
9. Déterminer $f(n)$ pour tout entier naturel n.
10. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$ (on pourra utiliser (E) ainsi que la monotonie de f).
11. On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En séparant (en justifiant) les termes d'indices pairs des termes d'indices impairs, calculer
$$f'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$
12. Tracer la courbe représentative de f en mettant en valeur toutes les propriétés établies.

Pour $n \geqslant 1$, f_n est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-n\}$. Ainsi la série de fonction peut être considérée sur $[0, +\infty[$.

1. Soit $x \geqslant 0$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ est une série alternée ; on a la suite numérique $\left(\dfrac{1}{n+x}\right)$ qui converge vers 0, en décroissant. Ainsi d'après le critère spécial des séries alternées, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ converge.

   Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement, vers une fonction que l'on note f, sur $[0, +\infty[$.

   On a $f(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \ln(2)$.

2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{n+x}$ est positive décroissante sur $[0, +\infty[$. Nous avons donc alors $\| f_n \|_{\infty,[0,+\infty[} = \frac{1}{n}$ et ainsi la convergence de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ n'est pas normale sur $[0, +\infty[$. On a aussi $\| f_n \|_{\infty,[a,b]} = \frac{1}{n+a} \sim \frac{1}{n}$ et ainsi la convergence de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ n'est pas normale non plus sur le segment $[a, b]$.

3. On a d'après la majoration du critère de Leibniz pour les séries alternées vérifiant le critère spécial, pour tout $x \geqslant 0$, $n \geqslant 1$,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p+x} \right| \leqslant \frac{1}{n+1+x} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

   Ainsi $\| R_n \|_{\infty,[0,+\infty[} \leqslant \frac{1}{n+1}$ et donc la suite $(\| R_n \|_\infty)$ converge vers 0 : ainsi la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément vers f sur $[0, +\infty[$.

   Comme il s'agir d'une série de fonctions continues sur $[0, +\infty[$, on en déduit que la somme f est aussi une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

4. Méthode 1 : on applique le théorème de la double limite. On sait déjà que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$, et on a aussi pour tout n non nul

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x} = 0 = \ell_n$$

   Ainsi on en déduit que f admet une limite en $+\infty$ qui est $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0$.

   Méthode 2 : si on ne souhaite pas utiliser le théorème d'interversion en $+\infty$, on sait que (série alternée vérifiant le critère spécial)

$$|f(x)| \leqslant |f_1(x)| = \frac{1}{x+1}$$

   et ainsi f tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

5. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ est une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, qui converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f.
On considère alors la séries des dérivées $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$. On a si $x\geqslant 0$

$$f_n'(x)=\frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$$

et ainsi

$$|f_n'(x)|\leqslant \frac{1}{(n+x)^2}\leqslant \frac{1}{n^2}$$

pour $x\geqslant 0$. Ainsi $\sum \parallel f_n' \parallel_{\infty,[0,+\infty[}$ est une série numérique convergente : la série des dérivées converge normalement, donc uniformément sur $[0,+\infty[$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et que l'on peut dériver terme à terme

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$$

Pour tout $x\geqslant 0$, la série numérique $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ est une série vérifiant le critère spécial des séries alternées, et ainsi la somme est du signe du premier terme, soit $f'(x)<0$. On en déduit que f est strictement décroissante.

6. Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on a si $x\geqslant 0$ (classique, par récurrence sur k)

$$f_n^{(k)}(x)=\frac{k!(-1)^{n+k-1}}{(n+x)^{k+1}}$$

Pour $k=0$, la série de fonction $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément, donc simplement sur $[0,+\infty[$;
Pour $k\geqslant 1$, on a

$$\left|f_n^{(k)}(x)\right|\leqslant \frac{k!}{n^{k+1}}$$

et ainsi $\sum \parallel f_n^{(k)} \parallel_{\infty,[0,+\infty[}$ est convergente : la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ est normalement convergente, donc uniformément sur $[0,+\infty[$.

Ainsi pour tout $p\geqslant 1$, on peut appliquer le théorème de dérivation d'ordre p : les séries $\sum f_n$, $\sum f_n'$, $\dots$,$\sum f_n^{(p-1)}$ convergent simplement sur $[0,+\infty[$ et la série $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$: f est de classe $\mathcal{C}^p$ et on a

$$f^{(p)}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p!(-1)^{n+p-1}}{(n+x)^{p+1}}$$

formule aussi valide lorsque $p=0$.

7. Soit $x\geqslant 0$, nous avons donc $f''(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2(-1)^{n+1}}{(n+x)^3}$, somme d'une série alternée vérifiant encore le critère spécial, et ainsi $f''(x)$ est du signe du premier terme, soit positif. Ainsi $f''\geqslant 0$ et donc la fonction f est une fonction convexe.

8. Il s'agit d'un simple télescopage : il suffit d'écrire les termes pour l'observer. On a pour $x \geqslant 0$,

$$f(x+1)+f(x) = \underbrace{\left[\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\cdots\right]}_{f(x+1)}+\underbrace{\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\cdots\right]}_{f(x)} = \frac{1}{x+1}$$

et puis voilà. Formellement, on écrit un décalage d'indice dans l'une des sommes

$$\begin{aligned} f(x+1)+f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x+1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{n+x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(1-1)\frac{1}{n+x}+\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

9. On exploite la relation (E) de façon récursive : nous avons $f(0)=\ln(2)$, et si $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{n}-f(n-1) \\ &= \frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n-1}-f(n-2)\right) \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}f(1) \\ &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}(1-f(0)) \\ &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}+(-1)^{n}\ln(2) \end{aligned}$$

que l'on peut prouver par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

10. En $+\infty$, on a puisque f décroissante

$$2f(x+1) \leqslant f(x+1)+f(x) \leqslant 2f(x)$$

et ainsi

$$f(x+1) \leqslant \frac{1}{2(x+1)} \leqslant f(x)$$

que l'on réécrit

$$\frac{1}{2(x+1)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2x}$$

d'où

$$\frac{x}{x+1} \leqslant 2xf(x) \leqslant 1$$

et ainsi par encadrement, $2xf(x)$ tend vers 1 en $+\infty$, soit encore

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

11. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = S$ et on note S_n la somme partielle associée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k^2} &= -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2} = -\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k^2}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2} \\ &= -\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = -S_{2n+1}+\frac{1}{2}S_n \longrightarrow -\frac{S}{2} = -\frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\boxed{f'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.}$$

12. Nous représentons la courbe de la fonction f, en mettant en valeur les informations obtenues :