Devoir surveillé n°2
3 heures

Exercice 1

On considère la fonction w définie sur $[0, +\infty[$ par

$$w(x) = x^2 - 2$$

1. Méthode de la tangente de Héron.
   (a) Soit $\alpha > 0$, donner une équation de la tangente $\mathcal{T}_\alpha$ à $\mathcal{C}_w$ en α.
   (b) Montrer que $\mathcal{T}_\alpha$ coupe l'axe (Ox) en un point d'abscisse
   $$\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{2}{\alpha}\right)$$
   (c) Représenter précisément sur un même graphique la courbe $\mathcal{C}_w$, la tangente $\mathcal{T}_\alpha$ avec $\alpha = 2$ par exemple.
2. Approximation de $\sqrt{2}$ par la méthode de Héron.

   On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 3/2$ et la relation de récurrence
   $$U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{2}{U_n}\right)$$
   et on pose $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$ sur $]0, +\infty[$.
   (a) Montrer que $]0, +\infty[$ est un intervalle stable par f. En déduire que la suite (U_n) est bien définie.

(b) Représenter joliment la suite (U_n) sur un graphique où l'on représente aussi $\mathcal{C}_w$ (et non $\mathcal{C}_f$) en mettant en valeur la méthode de la tangente.
Qu'observe-t-on ? Que peut-on conjecturer ?

(c) Étudier la fonction f sur $]0, +\infty[$. On précisera l'asymptote en $+\infty$ et la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

(d) Montrer que f admet un unique point fixe que l'on note ℓ et que l'on précisera.

(e) Représenter très joliment aussi la suite (U_n) sur un graphique où l'on représente $\mathcal{C}_f$, la première bissectrice, l'asymptote.

(f) Démontrer que si la suite (U_n) converge, alors elle converge vers ℓ (attention, il y a des pièges, vous êtes prévenu !).

(g) Montrer que la suite (U_n) est minorée par ℓ.

(h) Montrer que la suite (U_n) est strictement décroissante.

(i) Montrer que la suite (U_n) converge vers ℓ.

(j) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$U_{n+1} - \ell = \frac{(U_n - \ell)^2}{2U_n}$$

(k) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ 0 < U_{n+1} - \ell \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}(U_n - \ell)^2$$

(l) Montrer que (attention, bien lire deux puissance n)

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ 0 < U_n - \ell \leqslant \frac{1}{2^{\frac{3\times(2^n-1)}{2}}}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^{2^n}$$

(m) Retrouver le fait que la suite (U_n) converge vers ℓ.

(n) Montrer que $0 < \frac{3}{2} - \sqrt{2} < \frac{1}{10}$, et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ 0 < U_n - \ell \leqslant \frac{1}{10^{2^n}}$$

(o) Déterminer n_0 de sorte que U_{n_0} soit une valeur approchée à 10^{-10} de ℓ et préciser U_{n_0}. La valeur n_0 trouvée est-elle la valeur optimale ?
Et pour 10^{-100} ? Commentez et expliquez l'intérêt de cette méthode.

Exercice 2

Soit $(a, b, c, d) \in (\mathbb{R}^*)^4$ fixé, on considère une série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ à termes strictement positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+d)}$$

1. Quelle est la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$? Conclusion ?
   Et si on avait par exemple $a = b = 2$, $c = d = 1$?
2. Soit λ un réel, on pose pour tout entier n non nul, $w_n = \ln(n^\lambda u_n)$.
   (a) Montrer que
   $$w_{n+1} - w_n = \lambda \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$
   (b) Montrer que si u est un réel non nul, on a (avec un « grand O»)
   $$\ln(n+u) = \ln(n) + \frac{u}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
   (c) En déduire que
   $$w_{n+1} - w_n = \frac{\lambda + a + b - c - d}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
   (d) En déduire que la série $\sum(w_{n+1} - w_n)$ converge si et seulement si $\lambda = c + d - a - b$.
   (e) On pose désormais $\lambda = c + d - a - b$. Montrer que la suite (w_n) est convergente.
   (f) Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que $u_n \sim \dfrac{A}{n^\lambda}$.
   (g) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que la série $\sum u_n$ soit convergente.
3. Étudier la nature de la série de terme général u_n avec
   $$u_n = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$
   a) en utilisant l'étude ci-dessus
   b) à l'aide de la formule de Stirling et préciser la valeur de A.

Exercice 3

Soit $\alpha > 0$, on considère la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

On notera u_n le terme général de cette série.

1. Montrer la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ est une série alternée.
2. Déterminer un équivalent de u_n et en déduire que la suite (u_n) converge vers 0.
   Toto applique le théorème de comparaison par équivalence : qu'en déduit -il ? À-t-il raison ?
3. Montrer que $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.
4. Démontrer que l'on a
   $$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)$$
5. Montrer alors que si $\alpha > \frac{1}{2}$, la série numérique $\sum u_n$ est convergente.
6. On suppose que $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Montrer que
   $$u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$$
   et conclure.
7. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ soit convergente et comparer avec le résultat de Toto.
8. La suite positive
   $$(-1)^n \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$
   est-elle décroissante ?

Exercice 1

1. (a) Soit $\alpha > 0$. Comme w est dérivable, la tangente $\mathcal{T}_\alpha$ à $\mathcal{C}_w$ en α a pour équation normalisée

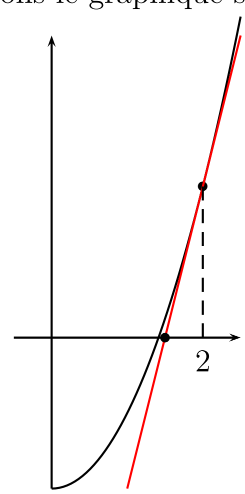
$$y = w'(\alpha)(x-\alpha) + w(\alpha) = 2\alpha(x-\alpha) + \alpha^2 - 2 = 2\alpha x - 2 - \alpha^2$$

(b) On a

$$y(x) = 0 \iff 2\alpha x = 2 + \alpha^2 \iff x = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{2}{\alpha}\right)$$

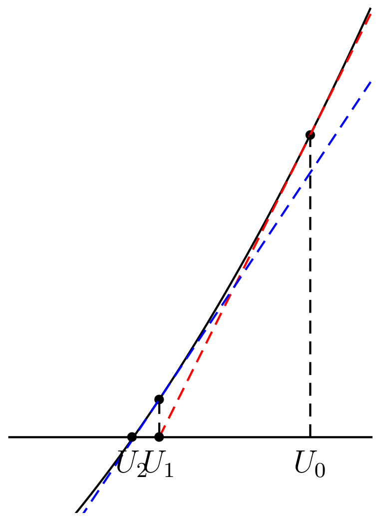
et ainsi $\mathcal{T}_\alpha$ coupe l'axe (Ox) en un point d'abscisse $\dfrac{1}{2}\left(\alpha + \dfrac{2}{\alpha}\right)$.

(c) Avec $\alpha = 2$, nous obtenons le graphique suivant :



2. (a) Soit $x \in]0, +\infty[$, on a $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) > 0$ et ainsi $f(x) \in]0, +\infty[$. Donc l'intervalle $]0, +_infty[$ est stable par la fonction f. Comme $U_0 = \frac{3}{2} \in I$, et la suite (U_n) étant définie par la relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$, on en déduit que la suite (U_n) est bien définie.

(b) On représente la méthode de la tangente, avec deux itérations seulement, la convergence étant tellement rapide :



On observe que la suite (U_n) est décroissante, converge vers l'abscisse de l'intersection de $\mathcal{C}_w$ avec l'axe (Ox), soit $\sqrt{2}$, et que cette convergence est très rapide.

(c) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et on a $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-2}{2x}$. On en déduit les variations :
En $+\infty$, on remarque que

$$f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

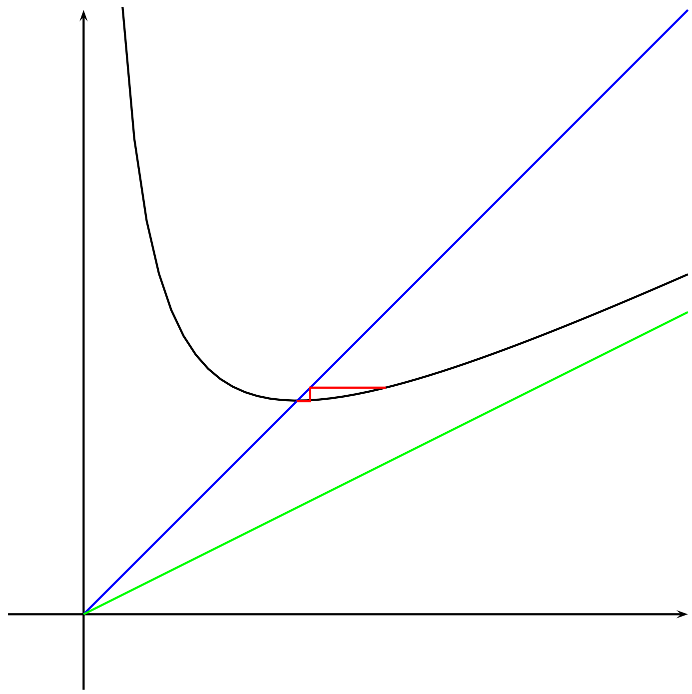
et ainsi $y = \frac{x}{2}$ est asymptote en $+\infty$, et la courbe est située au dessus de cette asymptote.

(d) Soit $x > 0$, on a

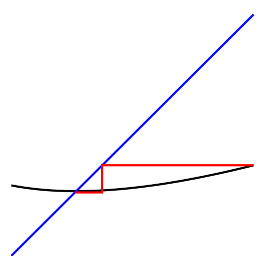
$$f(x) = x \iff 2x = x + \frac{2}{x} \iff x = \frac{2}{x} \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$$

et ainsi f admet un unique point fixe ℓ avec $\ell = \sqrt{2}$.

(e) On représente alors la suite récurrente (U_n) :



et en zoomant (la convergence est vraiment trop rapide !)



(f)

(g)

(h)

(i)

(j)

(k)

(l)

Exercice 2

1. Nous avons
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+d)} \sim \frac{n^2}{n^2} \sim 1$$
et ainsi la limite est 1. Le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure quoi que ce soit.

   Par contre, si $a = b = 2$ et $c = d = 1$, on constate que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ et ainsi on peut en déduire que la limite est en fait 1^+, et nous sommes dans un cas ou l'on peut tout de même conclure que la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente (et même directement ici, sans le critère, la suite (u_n) est croissante, strictement positive, donc ne tend pas vers 0 d'où la divergence grossière).

2. (a) On a
$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \ln((n+1)^\lambda u_{n+1}) - \ln(n^\lambda u_n) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^\lambda + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \lambda \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \end{aligned}$$

   (b) Soit u est un réel non nul, on a (avec un « grand O»), sachant que $\ln(1+x) = x + \mathrm{O}_0(x^2)$,
$$\begin{aligned} \ln(n+u) &= \ln\left(n\left(1 + \frac{u}{n}\right)\right) \\ &= \ln n + \ln\left(1 + \frac{u}{n}\right) \\ &= \ln(n) + \frac{u}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

   (c) Ainsi,
$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \lambda \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \lambda \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln(n+a) + \ln(n+b) - \ln(n+c) - \ln(n-d) \\ &= \frac{\lambda + a + b - c - d}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

(d) Si $\lambda = c+d-a-b$, nous avons $w_{n+1}-w_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ce qui assure la convergence absolue, donc la convergence de la série $\sum w_{n+1}-w_n$. Si $\lambda \neq c+d-a-b$, alors

$$w_{n+1} - w_n \sim \frac{\lambda + a + b - c - d}{n}$$

et par équivalence à un terme général de signe constant, on en déduit la divergence de la série $\sum w_{n+1} - w_n$.

Donc la série $\sum w_{n+1} - w_n$ est convergente si et seulement si $\lambda = c + d - a - b$.

(e) On pose désormais $\lambda = c + d - a - b$. On a par télescopage

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} w_{n+1} - w_n = w_{N+1} - w_0$$

et comme la série $\sum w_{n+1} - w_n$ est convergente, on en déduit que (S_N) admet une limite, et donc (W_{N+1}) aussi et donc (w_N) aussi. On note L cette limite.

(f) Ainsi on a

$$\ln(n^\lambda u_n) \longrightarrow L \qquad n^\lambda u_n \longrightarrow \mathrm{e}^L = A > 0$$

et ainsi $u_n \sim \dfrac{A}{n^\lambda}$.

(g) Par comparaison (termes positifs), la série $\sum u_n$ est donc convergente si et seulement si $\lambda > 1$ c'est à dire si et seulement si $c + d > a + b + 1$.

3.

Exercice 3

Soit $\alpha > 0$, on considère la série numérique

$$\sum_{n \geqslant 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

On notera u_n le terme général de cette série.

1. On sait que $\ln(1+x)$ est du signe de x. Ainsi
$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$
est du signe de $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. Donc la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est une série alternée.
2. On sait que $\ln(1+x) \sim_0 x$ et donc puisque $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ tend vers 0 si n tend vers $+\infty$, on a
$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \sim \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$
Toto applique le théorème de comparaison par équivalence : il obtient que la série est de même nature que la série
$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$
qui est convergente par application du critère spécial des séries alternées sachant que cette nouvelle série est bien alternée et que son terme général pris en valeur absolue $\frac{1}{n^\alpha}$ tend vers 0 en décroissant. Il en déduit alors que la série
$$\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$
converge toujours si $\alpha > 0$.
Toto a raison...ner de travers, l'équivalence du terme général n'étant pas applicable en général lorsque les termes des séries ne sont pas de signe contant (à partir d'aucun rang).
3. On a
$$|u_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$$
et ainsi $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.
4. Pour préciser la nature de notre série initiale, on effectue un développement asymptotique : on a puisque
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{O}(x^3)$$

$$
\begin{aligned}
u_n &= \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)
\end{aligned}
$$

5. Si $\alpha > \frac{1}{2}$, on a en fait

$$
u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)
$$

Or les deux séries numériques $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ sont convergentes, la première par application du critère spécial et la seconde comme série de Riemann convergent et ainsi dans ce cas, la série numérique $\sum u_n$ est convergente.

6. On suppose que $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. On a alors

$$
u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha}} < 0
$$

Et ici, par comparaison à une série de Riemann convergente, à termes de signe constant, on obtient que la série

$$
\sum \left(u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)
$$

est divergente, et ainsi comme la série

$$
\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}
$$

est convergente, la série $\sum u_n$ diverge forcément.

7. On en déduit que la série est convergente si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$. Hum, que dire de Toto ...

8. Elle ne peut donc pas être décroissante, car sinon on pourrait appliquer le critère spécial des séries alternées et on aurait la série

$$
\sum_{n \geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)
$$

convergente, ce qui n'est pas le cas ($\alpha = 1/2$).