Devoir surveillé n°3
3 heures

Exercice A - Étude d'une suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x < n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Tracer soigneusement les courbes des fonctions f_1 et f_2, puis approximativement les courbes des fonctions f_3, f_4, ...
2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Que vaut $f_n(x)$ lorsque n est grand ? Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. On pose $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Montrer que : $\forall x > -1\,,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^+\,,\ 0 \leqslant g_n(x)$.
   (c) Montrer que si $x \geqslant n$, $g_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-n}$.
   (d) Pour $x \in [0, n[$, montrer que
   $$g_n'(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} - \mathrm{e}^{-x}$$
   (e) On pose sur $[0, n[$,
   $$\phi_n(x) = (n-1)\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) + x$$
   Montrer que ϕ_n est dérivable et que
   $$\phi_n'(x) = \frac{x-1}{x-n}$$
   En déduire les variations de la fonction ϕ_n.
   En déduire l'existence de $x_n \in [0, n[$ de sorte que $\phi_n(x_n) = 0$ et que
   $$\| g_n \|_{\infty,[0,n[} = g_n(x_n)$$
   Montrer que
   $$g_n(x_n) = \frac{x_n \mathrm{e}^{-x_n}}{n}$$
   Étudier la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire qu'elle est bornée, par un certain réel M que l'on précisera.
   (f) En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice B - La méthode d'Abel

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ définie par $f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$ et et on pose, si cela est possible, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge-t-telle absolument ?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\| f_n \|_{\infty,\mathbb{R}}$. Conclure. De même avec $\| f_n \|_{\infty,[a,b]}$ avec $a < b$.
3. Pour $x = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, que vaut $f_n(x)$? Conclure.
4. Pour $x = (2p+1)\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, que vaut $f_n(x)$? Conclure.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$A_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{ikx}$$

et $A_0(x) = 0$.

(a) En écrivant que $\mathrm{e}^{inx} = A_n(x) - A_{n-1}(x)$, montrer que

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{A_n(x)}{n(n+1)} + \frac{A_N(x)}{N}$$

Cette transformation est appelée transformation d'Abel.

(b) On suppose désormais que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que

$$A_N(x) = \mathrm{e}^{ix} \frac{1 - \mathrm{e}^{iNx}}{1 - \mathrm{e}^{ix}}$$

En déduire que la suite $(A_N(x))$ est bornée.

(c) Montrer alors que la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{A_n(x)}{n(n+1)}$ converge absolument et en déduire que la suite $(S_N(x))$ admet une limite lorsque N tend vers $+\infty$.

(d) En déduire le domaine de définition D de S et le fait que

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n(x)}{n(n+1)}$$

(e) Montrer que S est une fonction 2π périodique.

6. Soit $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que $A_n(x) = \mathrm{e}^{\frac{i(n+1)x}{2}} \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$.
7. En déduire que sur $[a, 2\pi - a]$, avec $0 < a < \pi$, la fonction A_n bornée par $\frac{1}{\sin \frac{a}{2}}$.
8. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{A_n}{n(n+1)}$ converge normalement sur $[a, 2\pi - a]$.
9. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Problème - Résolution d'une équation fonctionnelle - CCINP - PC 2021

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x+1)+f(x) = \frac{1}{x^2}. \qquad (P)$$

On démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

   Dans tout les reste de cet exercice, on note $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$.
2. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $\varphi(x+1)+\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.
3. En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

4. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$.
5. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

II - Unicité de la solution

5. Montrer que si $f :]0,+\infty \to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

   On procédera par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
6. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

III - Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

7. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.

8. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

9. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.
10. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

    En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.
11. Montrer que φ est deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$ et montrer que $\varphi'' > 0$. Que peut-on en déduire ?
12. Représenter la courbe de φ en respectant les propriétés établies.