Quinzaine 4 du 12/11 au 22/11

Chapitre 3 : *Séries entières*
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum n^\alpha z^n$ est de rayon 1.
Rayon de convergence de la somme de deux séries entières.
Produit de Cauchy de deux séries entières. Rayon de convergence du produit de Cauchy de deux séries entières.
Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.
Exemple où la convergence est normale sur $[-R, R]$ et conséquence.
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.
L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ou du disque de convergence n'est pas un objectif du programme ; étude cependant du cas où le critère spécial de Leibniz s'applique pour obtenir une convergence uniforme par la majoration du reste sur $[0, R]$ ou $[-R, 0]$ ou $[-R, R]$.
Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.
Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la somme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.
Expression des coefficients d'une série entière au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme (*). Unicité des coefficients.

Formule par dérivation successive de $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$,

$$\forall x \in]-1, 1[\,, \ \frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p} \quad (*)$$

Développement en séries entière au voisinage de zéro d'une fonction d'une variable réelle.
Fonction développable en série entière.
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Formule de Taylor avec reste intégral. Utilisation avec les fonctions exponentielle, cosinus et sinus, exponentielle imaginaire.
Unicité du développement en série entière. Développements des fonctions usuelles : les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielles, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ (*), $x \mapsto \ln(1+x)$ (*).
Utilisation des équations différentielles. Développement de $(1+x)^\alpha$ en 0 (*). Cas $\alpha \in \{-1/2, 1/2\}$. Expression à l'aide de factorielles.
Continuité de la somme d'une série entière complexe sur le disque ouvert de convergence (admis).
Exemple de la somme géométrique complexe. Développement de $\exp(z)$ avec z complexe.

Chapitre 4 : *Espaces vectoriels - Révisions compléments*
(*Quelques révisions ciblées de première année :*
) Structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^\Omega = \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$, $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
Sous-espace vectoriel. Caractérisation. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$.
Intersection et sommes de plusieurs sous-espaces vectoriels.
Combinaison linéaire. Sous-espace vectoriel engendré.
Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Caractérisation par l'intersection.
Sous-espaces supplémentaires.

Famille de vecteurs, famille libre, famille génératrice, base.

Espace de dimension finie. Lemme de Steinitz.
Existence de base. Théorème de la base extraite, base intermédiaire, base incomplète.
Dimension d'un espace de dimension finie.
Dimension d'un sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie. Cas d'égalité.
Base adaptée à deux espaces supplémentaires.

Application linéaire. Image et noyau. Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.
Caractérisation des injections linéaires à l'aide du noyau.
Matrice d'une application linéaire.
Traduction matricielle de $u(x) = y$.
Changement de bases. Action sur les coordonnées : formule $X = PX'$. Action sur les matrices d'applications linéaires : formules $A' = Q^{-1}AP$ et $A' = P^{-1}AP$. Matrices semblables. Matrice de passage.
Puissances de matrices carrées.

Projections et symétries vectorielles. Caractérisation par $p^2 = p$ et $s^2 = \mathrm{id}$. Obtention de la matrice en dimension finie selon une base quelconque (exemples) et une base adaptée (en général).

Trace d'une matrice carrée. Linéarité ; trace de la transposée d'une matrice ; du produit de deux matrices : $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ (*).
Matrices semblables. Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.
La trace d'un projecteur est égal à son rang (*).
Trace d'une symétrie vectorielle.

Questions de cours :

- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.