Devoir en temps libre n°3

Exercice I :

On considère la série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec la suite (a_n) définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ et

$$\forall n \geqslant 2\,,\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \qquad (*)$$

1. Que peut-on dire de la suite (a_n) ? Attention, on ne demande pas ici de calculer a_n en fonction de n. Cela sera demandé uniquement à la fin de l'exercice.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ |a_n| \leqslant 4^n$. En déduire que le rayon de convergence R de cette série est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$.
3. Montrer en exploitant la relation $(*)$ que si $|z| < R$, on a
$$(2z^2 - 3z + 1)f(z) = 1$$
4. En déduire que si $|z| < R$,
$$f(z) = -\frac{1}{1-z} + \frac{2}{1-2z}$$
et déterminer R ainsi que a_n pour tout entier n.
5. Compléter la question 1 et retrouver la valeur de a_n en fonction de n.

Exercice II : un développement en série entière en 0

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Montrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, sans préciser ce développement (pourquoi ?)
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1 \qquad$ (E).
3. On note sur $]-1,1[$,
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
   (a) Montrer que $a_1 = 1$ et
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ (n+1)a_{n+1} - n a_{n-1} = 0$$
   (b) Que vaut a_0 ? En déduire que $a_{2n} = 0$ pour tout entier n.
   (c) Pour tout entier n, exprimer a_{2n+1} sous forme de factorielles.
   (d) En déduire le développement de f en série entière au voisinage de 0. Quel est le rayon de la série obtenue ?

☯