Quinzaine 5 du 25/11 au 06/12

Chapitre 4 : *Espaces vectoriels - Révisions compléments*
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.
Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme.
Si u et v commutent, alors le noyau de u (ainsi que l'image de u) est stable par v (*).

Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition). Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.
Polynôme annulateur.
Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent.
Adaptation de ces résultats aux matrices carrées. Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
Application au calcul de l'inverse et des puissances.
Le noyau de $P(u)$ est stable par u.

Base $(L_0, \ldots, L_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs élémentaires de Lagrange en $n+1$ points distincts $a_0, \ldots, a_n$ de $\mathbb{K}$ avec

$$L_i = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (X - a_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j)}$$

Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base, $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$.

La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points est le polynôme constant égal à 1.
Déterminants. Exemples et calculs de déterminants.
Déterminant de Vandermonde (*). Lien entre déterminant de Vandermonde et l'interpolation de Lagrange.

Chapitre 5 : *Réduction*
Droite stable par un endomorphisme.
Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.
Exemples de recherches de valeurs propres et de vecteurs propres à partir de la définition : équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$; équation aux éléments propres $AX = \lambda X$.
Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice carrée.
La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe (*).
Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Si un polynôme P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.
Si $u(x) = \lambda x$, alors $(u^k)(x)\lambda^k x$ et $P(u)(x) = P(\lambda)x$ (*).
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Par convention le polynôme caractéristique est unitaire.
Notation χ_A, χ_u. Coefficients de degré 0 et $n-1$ (et n) : $\chi_u = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$.
Les valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.
Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.
Multiplicité d'une valeur propre. Majoration (et minoration par 1) de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité (*).
Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.
Le théorème de Cayley-Hamilton : le polynôme caractéristique est annulateur (admis). La démonstration n'est pas exigible.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Une telle base est constituée de vecteurs propres.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale. Interprétation en termes d'endomorphisme.

Questions de cours :

- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.