Devoir surveillé n°3
3 heures

Exercice A - Étude d'une suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x < n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Tracer soigneusement les courbes des fonctions f_1 et f_2, puis approximativement les courbes des fonctions f_3, f_4, ...
2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Que vaut $f_n(x)$ lorsque n est grand ? Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. On pose $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Montrer que : $\forall x > -1\,,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^+\,,\ 0 \leqslant g_n(x)$.
   (c) Montrer que si $x \geqslant n$, $g_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-n}$.
   (d) Pour $x \in [0, n[$, montrer que
   $$g_n'(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} - \mathrm{e}^{-x}$$
   (e) On pose sur $[0, n[$,
   $$\phi_n(x) = (n-1)\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) + x$$
   Montrer que ϕ_n est dérivable et que
   $$\phi_n'(x) = \frac{x-1}{x-n}$$
   En déduire les variations de la fonction ϕ_n.
   En déduire l'existence de $x_n \in [0, n[$ de sorte que $\phi_n(x_n) = 0$ et que
   $$\| g_n \|_{\infty,[0,n[} = g_n(x_n)$$
   Montrer que
   $$g_n(x_n) = \frac{x_n \mathrm{e}^{-x_n}}{n}$$
   Étudier la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire qu'elle est bornée, par un certain réel M que l'on précisera.
   (f) En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice B - La méthode d'Abel

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ définie par $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$ et et on pose, si cela est possible, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge-t-telle absolument ?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\| f_n \|_{\infty,\mathbb{R}}$. Conclure. De même avec $\| f_n \|_{\infty,[a,b]}$ avec $a < b$.
3. Pour $x = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, que vaut $f_n(x)$? Conclure.
4. Pour $x = (2p+1)\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, que vaut $f_n(x)$? Conclure.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}^*$. On pose
$$A_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{ikx}$$
et $A_0(x) = 0$.
   (a) En écrivant que $\mathrm{e}^{inx} = A_n(x) - A_{n-1}(x)$, montrer que
$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{A_n(x)}{n(n+1)} + \frac{A_N(x)}{N}$$
   Cette transformation est appelée transformation d'Abel.
   (b) On suppose désormais que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que
$$A_N(x) = \mathrm{e}^{ix}\frac{1-\mathrm{e}^{iNx}}{1-\mathrm{e}^{ix}}$$
   En déduire que la suite $(A_N(x))$ est bornée.
   (c) Montrer alors que la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{A_n(x)}{n(n+1)}$ converge absolument et en déduire que la suite $(S_N(x))$ admet une limite lorsque N tend vers $+\infty$.
   (d) En déduire le domaine de définition D de S et le fait que
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n(x)}{n(n+1)}$$
   (e) Montrer que S est une fonction 2π périodique.
6. Soit $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que $A_n(x) = \mathrm{e}^{\frac{i(n+1)x}{2}} \dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.
7. En déduire que sur $[a, 2\pi - a]$, avec $0 < a < \pi$, la fonction A_n bornée par $\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}$.
8. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{A_n}{n(n+1)}$ converge normalement sur $[a, 2\pi - a]$.
9. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Problème - Résolution d'une équation fonctionnelle - CCINP - PC 2021

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2}. \qquad (P)$$

On démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

   Dans tout les reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$.
2. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.
3. En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

4. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geqslant 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
5. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

II - Unicité de la solution

5. Montrer que si $f :]0, +\infty \to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

   On procédera par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
6. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

III - Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

7. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.

8. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

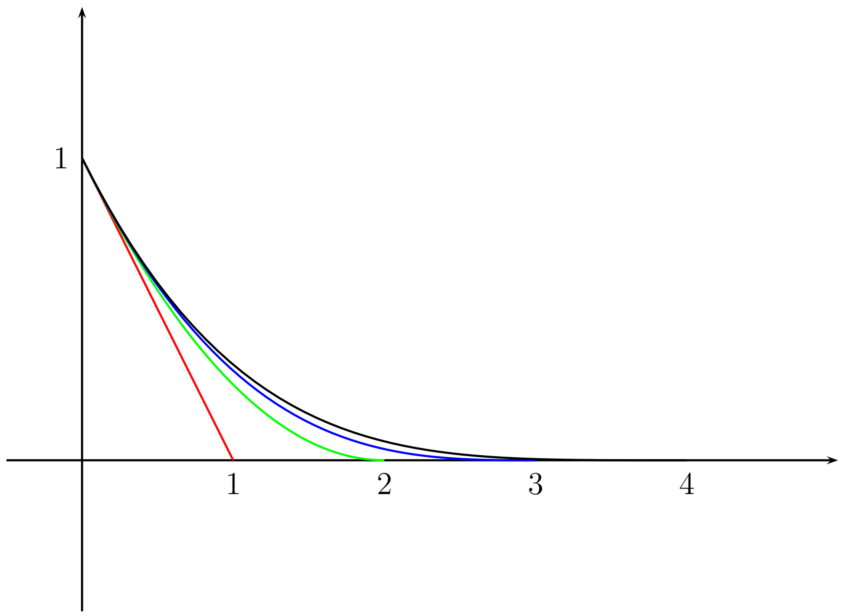
9. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0, +\infty[$.
10. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

    En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.
11. Montrer que φ est deux fois dérivables sur $]0, +\infty[$ et montrer que $\varphi'' > 0$. Que peut-on en déduire ?
12. Représenter la courbe de φ en respectant les propriétés établies.

Exercice A

1. On donne les représentations (non orthonormée pour mieux visualiser) :



2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, il existe un rang N_0 à partir duquel $x < n$. Ainsi, à partir de ce rang, on a

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)}$$

Or puisque $\frac{x}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on a

$$\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{x}{n}$$

et ainsi

$$n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -x$$

d'où

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-x}$$

et donc finalement

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \mathrm{e}^{-x}.}$$

Ainsi la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement sur $I = \mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

3. (a) On pose $f(x) = x - \ln(1 + x)$ si $x > -1$. La fonction f est dérivable et on a $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{x+1}$, du signe de x. Ainsi f admet un maximum en $x = 0$, et on a $f(0) = 0$. Donc $f(x) \leqslant 0$, c'est à dire $\ln(1 + x) \leqslant x$, pour $x > -1$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Si $x \geqslant n$, $g_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$.
   Si $x \in [0, n[$,

$$g_n(x) = \mathrm{e}^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)}$$

Or

$$\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \leqslant -\frac{x}{n}$$

et ainsi

$$n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \leqslant -x$$

puis

$$\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$$

et ainsi $g_n(x) \geqslant 0$. Donc finalement, $\forall x \geqslant 0\,,\ g_n(x) \geqslant 0$.

(c) Si $x \geqslant n$, on a $g_n(x) = f(x) = \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-n}$.

(d) Si $x \in [0,n[$, on a

$$g_n'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - n\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} \times \frac{-1}{n} = \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} - \mathrm{e}^{-x}$$

(e) La fonction Φ_n est dérivable par opérations sur $[0,n[$, et on a

$$\Phi_n'(x) = (n-1) \times \frac{\frac{-1}{n}}{1-\frac{x}{n}} + 1 = \frac{-n+1}{n-x} + 1 = \frac{-n+1+n-x}{n-x} = \frac{1-x}{n-x} = \frac{x-1}{x-n}$$

On en déduit les variations de Φ_n sur $[0,n[$:

x	0		1		x_n		n
		$+$	0				$\Vert$
Φ_n	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$

Ainsi il existe x_n entre 1 et n tel que $\Phi_n(x_n) = 0$, de sorte que $g_n' \geqslant 0$ sur $[0, x_n]$ et $g_n' \leqslant 0$ sur $[x_n, n[$ puisque (passage au logarithme népérien strictement croissant)

$$g_n'(x) > 0 \iff \Phi_n(x) > 0$$

et ainsi les variations de g_n conduisent à $\parallel g_n \parallel_{\infty,[0,n[} = g_n(x_n)$. De plus

$$g_n(x_n) = f(x_n) - f_n(x_n) = \mathrm{e}^{-x_n} - \left(1-\frac{x_n}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-x_n} - \left(1-\frac{x_n}{n}\right)\mathrm{e}^{-x_n} = \frac{x_n\mathrm{e}^{-x_n}}{n}$$

L'étude de $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ montre qu'elle est majorée par $\frac{1}{\mathrm{e}}$ et ainsi

$$g_n(x_n) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}n}$$

(f) On en déduit que

$$\parallel f - f_n \parallel_{\infty,[0,+\infty[} \leqslant \max\left(\frac{1}{\mathrm{e}n}, \mathrm{e}^{-n}\right)$$

et que donc à partir d'un certain rang,

$$\parallel f - f_n \parallel_{\infty,[0,+\infty[} \leqslant \mathrm{e}^{-n}$$

et ainsi la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice B - La méthode d'Abel

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ définie par $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$ et et on pose, si cela est possible, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $|f_n(x)| = \frac{1}{n}$ et ainsi la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ ne converge pas absolument.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme sur $\mathbb{R}$, $|f_n(x) = \frac{1}{n}$, on a $\| f_n \|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1}{n}$. Ainsi comme $\sum_{n\geqslant 1} \| f_n \|_{\infty,\mathbb{R}}$ est divergente, la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$. De même, on a $\| f_n \|_{\infty,[a,b]} = \frac{1}{n}$ et donc la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur un segment $[a,b]$.
3. Pour $x = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, on a $f_n(x) = \frac{1}{n}$. Ainsi la série numérique $\sum f_n(x)$ est divergente. On ne peut pas définir $S(x)$.
4. Pour $x = (2p+1)\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, que vaut $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$. Par le critère spécial des séries alternées, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge. On peut définie $S(x)$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}^*$. On pose
$$A_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{ikx}$$
et $A_0(x) = 0$.
   (a) On a $\mathrm{e}^{inx} = A_n(x) - A_{n-1}(x)$, alors
$$\begin{aligned} S_N(x) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{A_n(x) - A_{n-1}(x)}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{A_n(x)}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{A_{n-1}(x)}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{A_n(x)}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{A_n(x)}{n+1} = \sum_{n=1}^{N-1} A_n(x) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{A_N(x)}{N} - \frac{A_0(x)}{1} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{A_n(x)}{n(n+1)} + \frac{A_N(x)}{N} \end{aligned}$$
   Cette transformation est appelée transformation d'Abel.

   (b) On suppose désormais que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. On a comme somme géométrique
$$A_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \left[\mathrm{e}^{ix}\right]^k = \mathrm{e}^{ix} \frac{1 - \mathrm{e}^{iNx}}{1 - \mathrm{e}^{ix}}$$
   On a alors
$$|A_N(x)| \leqslant \frac{2}{|1 - \mathrm{e}^{ix}|} = B(x)$$
   Ainsi la suite $(A_N(x))$ est bornée.

   (c) On en déduit que la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{A_n(x)}{n(n+1)}$ converge absolument et ainsi elle converge, et donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \frac{A_n(x)}{n(n+1)}$ admet une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$, et comme $\frac{A_N(x)}{N}$ tend vers 0 puisque $(A_N(x))$ bornée, $(S_N(x))$ admet une limite lorsque N tend vers $+\infty$.

(d) Ainsi on peut définir $S(x)$, et on a

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{A_n(x)}{n(n+1)}$$

et cela si $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$.

(e) Soit $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $x+2\pi\notin 2\pi\mathbb{Z}$ et on a

$$S(x+2\pi)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{in(x+2\pi)}}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{inx}}{n}=S(x)$$

Ainsi S est une fonction 2π périodique.

6. Soit $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$. Alors

$$A_n(x)=\mathrm{e}^{ix}\frac{1-\mathrm{e}^{iNx}}{1-\mathrm{e}^{ix}}=\mathrm{e}^{ix}\frac{-2i\mathrm{e}^{in/2x}\sin\frac{nx}{2}}{-2i\mathrm{e}^{ix/2}\sin\frac{x}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{i(n+1)x}{2}}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

7. Alors

$$|A_n(x)|=\frac{|\sin\frac{nx}{2}|}{\sin\frac{x}{2}}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$$

et sur $[a,2\pi-a]$, avec $0<a<\pi$, $\sin\frac{x}{2}\geqslant\sin\frac{a}{2}$, et ainsi la fonction A_n bornée par $\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}$.

8. Nous avons donc alors

$$\|\frac{A_n}{n(n+1)}\|_{\infty,[a,\pi-a]}\leqslant\frac{\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}}{n(n+1)}\leqslant\frac{\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}}{n^2}$$

Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{A_n}{n(n+1)}$ converge normalement sur $[a,2\pi-a]$.

9. On applique alors le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions qui converge normalement donc uniformément sur tout $[a,2\pi-a]$, $0<a<\pi$, à la série $\displaystyle\sum\frac{A_n}{n(n+1)}$ qui converge simplement vers S sur $]0,2\pi[$, et on obtient que S est continue sur $]0,2\pi[$. La 2π périodicité permet d'étendre la continuité à $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

CCINP PC - 2021

I.1 Soit $x>0$, on étudie la série numérique

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

Il s'agit d'une série alternée, qui vérifie le critère spécial puisque la suite $\left(\frac{1}{(x+k)^2}\right)$ décroît vers 0. Ainsi la série numérique est bien convergente. On en déduit que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. On aurait pu aussi utiliser le fait que

$$\frac{1}{(x+k)^2}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{k^2}$$

et en déduire la convergence absolue et donc la convergence de la série numérique.

I.2 Soit $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(x+1)+\varphi(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+1+k)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(x+k)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\\ &= -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}+\frac{1}{x^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}=\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

I.3 D'après le théorème spécial des séries alternées, le reste d'ordre n est majoré en valeur absolue par la valeur absolue de son premier terme, soit

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\varphi_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

I.4 Nous avons alors sur $[a,+\infty[$,

$$\| R_n \|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{1}{(a+n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et ainsi la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$ (vraie aussi sur $]0,+\infty[$ en fait.

On remarquera que φ_0 n'est pas bornée, elle n'admet pas de norme infinie sur $]0,+\infty[$. La question de la convergence normale n'a pas de sens.

Sur $[a,+\infty[$, nous avons

$$\| \varphi_k \|_{\infty,[a,+\infty[} = \frac{1}{(a+k)^2}$$

et ainsi la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

I.5 Par le critère spécial des séries alternées, si $x > 0$, nous avons

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{x^2}$$

Ainsi φ tend vers 0 en $+\infty$.

On peut aussi appliquer le théorème de la double limite : pour tout entier k, on a $\lim_{x\to+\infty}\varphi_k(x) = 0$ et la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$ par exemple. Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}0 = 0.$$

Ainsi, finalement, la fonction φ est une solution de (P).

II.6 On suppose que f est une solution de (P). On a déjà

$$\forall x \in]0,+\infty[\,,\ f(x) = -f(x+1)+\frac{1}{x^2}$$

et ainsi la proposition est vraie au rang 0. On suppose la propriété vraie au rang n pour $x > 0$, alors si $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} + (-1)^{n+1} f(x+n+1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} + (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{(x+n+1)^2} - f(x+n+2) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} + (-1)^{n+2} f(x+n+2) \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

Q.7 Soit $x > 0$, on a $(f(x+n+1))$ qui tend vers 0 si n tend vers$+\infty$, et ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = f(x) - (-1)^{n+1} f(x+n+1)$$

converge vers $f(x)$. On en déduit que $f(x) = \varphi(x)$. Ainsi φ est l'unique solution de (P).

Q.8 La fonction ϕ_0 n'est pas bornée sur $]0+, \infty[$. Soit $\varepsilon > 0$, on se place sur $[\varepsilon, +\infty[$ pour que les fonctions soient bornées. On a alors

$$|\varphi_k(x)| \leqslant \frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$$

et ainsi $\| \varphi_k \|_{\infty, [\varepsilon, +\infty[} \leqslant \frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$. Or puisque

$$\frac{1}{(\varepsilon+k)^2} \sim \frac{1}{k^2}$$

la série numérique $\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$ converge et donc la série numérique $\sum_{k \geqslant 0} \| \varphi_k \|_{\infty, [\varepsilon, +\infty[}$ aussi. Ainsi la série de fonctions converge normalement et donc uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Remarque : on a aussi vu que

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}$$

et ainsi $\| R_n \|_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}$ et donc la suite $(\| R_n \|_\infty)$ converge vers 0. Donc on obtiendrait que la série de fonctions $\sum \varphi_k$ converge uniformément vers φ sur $]0, +\infty[$, en mettant de côté le fait que les sommes partielles ne soient pas bornées sur $]0, +\infty[$, mais les restes oui.

Nous avons une série de fonctions $\sum_{k \geqslant 0} \varphi_k$ continues sur $]0, +\infty[$, qui converge uniformément sur tout $[\varepsilon, +\infty[$, $\varepsilon > 0$ et donc sur tout segment de $]0, +\infty[$. Ainsi d'après le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, la somme φ est alors continue sur $]0, +\infty[$.

Comme on a

$$\forall x > 0\,,\ \varphi(x) + \varphi(x+1) = \frac{1}{x^2}$$

on a

$$\forall x > 0\,,\ x^2\varphi(x) + x^2\varphi(x+1) = 1$$

et ainsi
$$\forall x > 0\,,\; x^2\varphi(x) = 1 - x^2\varphi(x+1)$$
Donc on a sachant que φ continue en 1, $x^2\varphi(x+1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et ainsi
$$\lim_{x\to 0} x^2\varphi(x) = 1$$
soit encore
$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

Q.9 La série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers φ. On considère la série des dérivées $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k'$ soit $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$. Sur $[\varepsilon,+\infty[$, nous avons
$$|\varphi_k'(x)| \leqslant \frac{2}{(\varepsilon+k)^3}$$
et ainsi $\parallel \varphi_k' \parallel_{\infty,[\varepsilon,+\infty[} \leqslant \frac{2}{(\varepsilon+k)^3}$ ce qui assure la converge normale de la série des dérivées sur $[\varepsilon,+\infty[$ et donc la convergence uniforme. On en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[\varepsilon,+\infty[$ et donc sur $]0,+\infty[$, et que l'on peut dériver terme à terme, c'est à dire
$$\forall x > 0\,,\; \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

Q.10 On a si $x > 0$,
$$\varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$$
série numérique qui vérifie le critère spécial des séries alternées, et ainsi $\varphi'(x)$ est du signe du premier terme, soit négatif. On a donc $\varphi'(x) \leqslant 0$, sur $]0,+\infty$. Ainsi φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

Q.11 On sait que si $x > 0$, $\dfrac{1}{x^2} = \varphi(x) + \varphi(x+1)$ et ainsi comme φ est décroissante
$$\frac{1}{x^2} = \varphi(x) + \varphi(x+1) \leqslant 2\varphi(x)$$
Si $x > 1$, $x - 1 > 0$ et on a de même
$$\frac{1}{(x-1)^2} = \varphi(x-1) + \varphi(x)$$
et ainsi comme φ est décroissante
$$\frac{1}{(x-1)^2} = \varphi(x) + \varphi(x-1) \geqslant 2\varphi(x)$$
Donc finalement, si $x > 1$,
$$\frac{1}{x^2} \leqslant 2\varphi(x) \leqslant \frac{1}{(x-1)^2}.$$
On a ainsi
$$1 \leqslant 2x^2\varphi(x) \leqslant \frac{x^2}{(x-1)^2}$$
et donc par le théorème des gendarmes comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x^2\varphi(x) = 1$, on a
$$\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}$$

Q.12 La série de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers φ, et la série des dérivées $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k$ converge aussi simplement sur $]0,+\infty[$ par la question 8.

On considère la série des dérivées secondes $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k''$ soit

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{6(-1)^k}{(x+k)^4}$$

Sur $[\varepsilon,+\infty[$, nous avons

$$|\varphi_k''(x)| \leqslant \frac{6}{(\varepsilon+k)^4}$$

et ainsi $\| \varphi_k'' \|_{\infty,[\varepsilon,+\infty[} \leqslant \frac{6}{(\varepsilon+k)^3}$ ce qui assure la converge normale de la série des dérivées sur $[\varepsilon,+\infty[$ et donc la convergence uniforme sur $[\varepsilon,+\infty[$. On en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout $[\varepsilon,+\infty[$ et donc sur $]0,+\infty[$, et que l'on peut dériver terme à terme deux fois, c'est à dire

$$\forall x > 0\,,\ \varphi''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{6(-1)^k}{(x+k)^4}.$$

On a si $x > 0$,

$$\varphi''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{6(-1)^k}{(x+k)^4}$$

série numérique qui vérifie le critère spécial des séries alternées, et ainsi $\varphi''(x)$ est du signe du premier terme, soit positif. On a donc $\varphi''(x) \leqslant 0$, sur $]0,+\infty$. Ainsi φ est une fonction convexe sur $]0,+\infty[$.

Q.13 On combine la convexité (la courbe est partout située au dessus de ses tangentes), la limite $+\infty$ en 0 et 0 en $+\infty$, d'où l'allure :