Devoir surveillé n°4
4 heures

Exercice A :

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$, de rayon R.

1. Déterminer R.
2. Rappeler le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
3. Sur $]-R,R[$, calculer la somme $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$.
4. Montrer alors que la fonction f peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, que l'on notera g. Que vaut $g(R)$ et $g(-R)$?
5. Quel est le domaine réel de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$?
6. La convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$ est-elle uniforme sur $]-R,R[$?

Exercice B :

On rappelle qu'une involution de $\{1,\dots,n\}$ est une application $s:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$ telle que $s\circ s(k)=k$ pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$, c'est à dire $s\circ s=\mathrm{id}$ ou encore s bijective avec $s^{-1}=s$. On note I_n le nombre d'involutions de $\{1,\dots,n\}$ et on convient que $I_0=1$.

1. (*) Déterminer I_1 et I_2.
2. (*) Combien y-a-t-il de bijections de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,n\}$?
3. (*) Dessiner les bijections de $\{1,2,3\}$ sur $\{1,2,3\}$ et en déduire I_3.
4. (***) Démontrer que, si $n\geqslant 1$, alors $I_{n+1}=I_n+nI_{n-1}$.
5. (*) Démontrer que la série entière $S(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{I_n}{n!}x^n$ converge pour tout x de $]-1,1[$. On note S sa somme.
6. (**) Justifier que, en partant de la relation de récurrence ci-dessus, que pour tout $x\in]-1,1[$, on a $S'(x)=(1+x)S(x)$.
7. En déduire une expression de $S(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
8. En déduire une expression de I_n (à l'aide d'une somme).

Sujet A :

Partie I :

1. (*) Rappeler le développement en série entière de la fonction Arctan, ainsi que son rayon de convergence. En déduire la valeur de la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^k\frac{1}{2k+1}$.
2. (**) Montrer que le développement en série entière de la question précédente converge uniformément sur $[0,1]$. Quelle est la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$?
3. (*) Calculer la primitive de la fonction Arctan qui s'annule en 0 (on intégrera par parties). (**) En déduire la valeur de la somme
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)}$$
4. (*) Donner le développement en série entière de la fonction $x\mapsto\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et son rayon de convergence. (*) Exprimer pour $|x|<1$, à l'aide des fonctions usuelles, les somme des deux séries
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\qquad\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+3}}{4n+3}$$

Partie II :

On considère l'équation différentielle

$$(E)\qquad 2x(x+1)y''+(5x+3)y'+y=0$$

1. (**) Déterminer une fonction développable $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ en série entière en 0 qui soit solution de (E). On précisera le rayon de convergence de la série.
2. (**) Exprimer $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles. On séparera les cas $x>0$ et $x<0$ et on utilisera les résultats de la partie I.
3. (*) Sauriez-vous trouver une solution de (E) sur $]0,+\infty[$?

Partie III :

On considère la série de fonctions de termes général

$$u_n(x)=\frac{x^{4n+1}}{4n+1}-\frac{x^{2n+1}}{4n+3}$$

1. (*) Déterminer le domaine de convergence. On déterminera selon les valeurs de x un équivalent simple de $|u_n(x)|$.
2. (*) Donner une expression simple de sa somme $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ sur l'intervalle $]0,1[$.

   (*) Quelle est la limite de $S(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures ?
3. (**) Calculer $S(1)$ (on utilisera I.2.). En déduire que la série ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ ni sur $[0,1[$.

Sujet B

On pose pour tout x réel

$$J(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin t) \mathrm{d}t$$

La fonction J intervient dans la résolution de nombreux problèmes de Mécanique et de Physique. Elle est appelée fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0.

1. Développement en série entière de la fonction J.

   (a) Justifier que pour tout x réel, $J(x)$ est bien défini et que l'on a

   $$J(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x \sin t)^{2n} \mathrm{d}t$$

   (b) Soit x réel fixé ; on pose pour tout t de $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

   $$f_n(t) = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} (\sin t)^{2n}$$

   Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I.

   (c) En déduire que J est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et préciser les coefficients du développement à l'aide de

   $$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} \mathrm{d}t$$

   où n est un entier. On ne cherchera pas à calculer les coefficients a_n pour l'instant.

2. Calcul des coefficients a_n.

   (a) Calculer a_0.

   (b) Soit $n \geqslant 1$, en écrivant

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t (\sin t)^{2n-1} \mathrm{d}t$$

   et en intégrant par parties, montrer que

   $$a_n = (2n-1)(a_{n-1} - a_n)$$

   et en déduire a_n en fonction de a_{n-1}.

   (c) Montrer que

   $$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_n = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n}$$

   (d) En déduire que pour tout x réel

   $$J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

   Que peut-on en déduire pour la fonction J ?

3. Montrer que la fonction J est paire et calculer $J(0)$. Montrer aussi que la fonction J est bornée et préciser sa norme infinie.

4. Pour $x > 0$, on pose

$$R_n(x) = \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(r!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}$$

Préciser le signe de $R_1(x)$ et $R_2(x)$, lorsque $x \in]0, 6[$. En déduire sur cet intervalle, un encadrement de J par deux fonctions polynômes de degré au plus égal à 4 que l'on précisera.