Quinzaine 6 du 09/12 au 20/12

Chapitre 5 : *Réduction*
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Une telle base est constituée de vecteurs propres.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale. Interprétation en termes d'endomorphisme.

Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.
Dans la pratique des cas numériques, on se limitera à $n = 2$ ou $n = 3$.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace. Traduction matricielle.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propres associé est égale à sa multiplicité. Traduction matricielle.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable (*).
Polynôme caractéristique scindé à racines simples.
Interprétation matricielle de ces résultats.

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. La démonstration n'est pas exigible.
Traduction matricielle. Le lemme de décomposition des noyaux est hors programme.
L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable (*).
Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet $\displaystyle\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}(X-\lambda)$ pour polynôme annulateur.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire.
Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.
Un endomorphisme (une matrice carrée) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. La démonstration n'est pas exigible.
Dans $\mathbb{C}$, toute matrice carrée et tout endomorphisme est trigonalisable.
Traduction matricielle.
La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.

Chapitre 6 : *Probabilités*
Révisions non exhaustives de première année : Ensemble, appartenance, ensemble vide. Inclusion. Partie ou sous-ensemble. Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, privé de, complémentaire. Produit cartésien fini. Ensemble des parties d'un ensemble.

Application. Graphe. Indicatrices. Restriction et prolongement. Composition.
Image directe et image réciproque. Propriétés pour les images réciproques.
Injection, surjection, bijection. Propriétés usuelles.

Cardinal d'un ensemble fini. Cardinal du complémentaire, de la différence, du produit cartésien.
Cardinal de $\mathcal{F}(E,F)$. Cardinal de $\mathcal{P}(E)$ (*) : preuve par récurrence ou preuve ensembliste par la formule du binôme.
Preuve ensembliste de la formule $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ (*).
Nombre d'injections, nombre de p-liste d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n.
Nombre de bijections, de permutations.
Nombre de parties à p éléments ou p-combinaisons d'un ensemble de cardinal n.
Formules sur les coefficients de Newton. Formule du binôme, triangle de Pascal.

Si Ω est un ensemble, on appelle *tribu* sur Ω une partie $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω telle que :
- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$,
- pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, la réunion $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

Stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.
L'ensemble Ω est l'univers ; il n'est pas en général précisé. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont les événements. Les étudiants doivent savoir expliciter un événement à partir d'autres événements en utilisant la réunion, l'intersection et le complémentaire, différence, privé de. On fait le parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste.
L'événement $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ est réalisé si et seulement si, pour tout n de $\mathbb{N}$, A_n est réalisé.
L'événement $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est réalisé si et seulement si, il existe n de $\mathbb{N}$, tel que A_n est réalisé.
Exemple de la tribu totale $\mathcal{P}(\Omega)$.

Questions de cours :
- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.