Devoir surveillé n°4
4 heures

Exercice A :

On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$, de rayon R.

1. Déterminer R.
2. Rappeler le développement en série entière en 0 de $x\mapsto \frac{1}{1+x}$.
3. Sur $]-R,R[$, calculer la somme $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$.
4. Montrer alors que la fonction f peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, que l'on notera g. Que vaut $g(R)$ et $g(-R)$?
5. Quel est le domaine réel de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$?
6. La convergence de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$ est-elle uniforme sur $]-R,R[$?

Exercice B :

On rappelle qu'une involution de $\{1,\dots,n\}$ est une application $s:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$ telle que $s\circ s(k)=k$ pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$, c'est à dire $s\circ s=\mathrm{id}$ ou encore s bijective avec $s^{-1}=s$. On note I_n le nombre d'involutions de $\{1,\dots,n\}$ et on convient que $I_0=1$.

1. (*) Déterminer I_1 et I_2.
2. (*) Combien y-a-t-il de bijections de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,n\}$?
3. (*) Dessiner les bijections de $\{1,2,3\}$ sur $\{1,2,3\}$ et en déduire I_3.
4. (***) Démontrer que, si $n\geqslant 1$, alors $I_{n+1}=I_n+nI_{n-1}$.
5. (*) Démontrer que la série entière $S(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{I_n}{n!}x^n$ converge pour tout x de $]-1,1[$. On note S sa somme.
6. (**) Justifier que, en partant de la relation de récurrence ci-dessus, que pour tout $x\in]-1,1[$, on a $S'(x)=(1+x)S(x)$.
7. En déduire une expression de $S(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
8. En déduire une expression de I_n (à l'aide d'une somme).

Sujet A :

Partie I :

1. (*) Rappeler le développement en série entière de la fonction Arctan, ainsi que son rayon de convergence. En déduire la valeur de la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^k\frac{1}{2k+1}$.
2. (**) Montrer que le développement en série entière de la question précédente converge uniformément sur $[0,1]$. Quelle est la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$?
3. (*) Calculer la primitive de la fonction Arctan qui s'annule en 0 (on intégrera par parties). (**) En déduire la valeur de la somme
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)}$$
4. (*) Donner le développement en série entière de la fonction $x\mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et son rayon de convergence. (*) Exprimer pour $|x|<1$, à l'aide des fonctions usuelles, les somme des deux séries
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+3}}{4n+3}$$

Partie II :

On considère l'équation différentielle

$$(E)\qquad 2x(x+1)y''+(5x+3)y'+y=0$$

1. (**) Déterminer une fonction développable $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ en série entière en 0 qui soit solution de (E). On précisera le rayon de convergence de la série.
2. (**) Exprimer $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles. On séparera les cas $x>0$ et $x<0$ et on utilisera les résultats de la partie I.
3. (*) Sauriez-vous trouver une solution de (E) sur $]0,+\infty[$?

Partie III :

On considère la série de fonctions de termes général

$$u_n(x)=\frac{x^{4n+1}}{4n+1}-\frac{x^{2n+1}}{4n+3}$$

1. (*) Déterminer le domaine de convergence. On déterminera selon les valeurs de x un équivalent simple de $|u_n(x)|$.
2. (*) Donner une expression simple de sa somme $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ sur l'intervalle $]0,1[$.

   (*) Quelle est la limite de $S(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures ?
3. (**) Calculer $S(1)$ (on utilisera I.2.). En déduire que la série ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ ni sur $[0,1[$.

Sujet B

On pose pour tout x réel

$$J(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin t) \mathrm{d}t$$

La fonction J intervient dans la résolution de nombreux problèmes de Mécanique et de Physique. Elle est appelée fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0.

1. Développement en série entière de la fonction J.
   (a) Justifier que pour tout x réel, $J(x)$ est bien défini et que l'on a

   $$J(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x \sin t)^{2n} \mathrm{d}t$$

   (b) Soit x réel fixé ; on pose pour tout t de $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

   $$f_n(t) = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} (\sin t)^{2n}$$

   Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I.

   (c) En déduire que J est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et préciser les coefficients du développement à l'aide de

   $$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} \mathrm{d}t$$

   où n est un entier. On ne cherchera pas à calculer les coefficients a_n pour l'instant.
2. Calcul des coefficients a_n.
   (a) Calculer a_0.

   (b) Soit $n \geqslant 1$, en écrivant

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t (\sin t)^{2n-1} \mathrm{d}t$$

   et en intégrant par parties, montrer que

   $$a_n = (2n-1)(a_{n-1} - a_n)$$

   et en déduire a_n en fonction de a_{n-1}.

   (c) Montrer que

   $$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; a_n = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n}$$

   (d) En déduire que pour tout x réel

   $$J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

   Que peut-on en déduire pour la fonction J ?
3. Montrer que la fonction J est paire et calculer $J(0)$. Montrer aussi que la fonction J est bornée et préciser sa norme infinie.

4. Pour $x > 0$, on pose

$$R_n(x) = \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(r!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}$$

Préciser le signe de $R_1(x)$ et $R_2(x)$, lorsque $x \in]0, 6[$. En déduire sur cet intervalle, un encadrement de J par deux fonctions polynômes de degré au plus égal à 4 que l'on précisera.

Exercice A :

1. La série entière est lacunaire.
   Si $x = 1$, $((-1)n + 1nx^{2n+1})$ ne tend pas vers 0 puisque $|(-1)^{n+1}nx^{2n+1}| = 1$. Ainsi déjà $R \leqslant 1$.
   Si $|x| < 1$, $((-1)^{n+1}nx^{2n+1})$ tend vers 0, puisque par croissance comparée, (x^{2n+1}) s'impose et donc est bornée. Ainsi $R \geqslant 1$.
   Finalement, $R = 1$.
2. On sait que si $|x| < 1$, alors $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$.
3. Ainsi, par dérivation terme à terme d'une série entière, nous avons sur $]-1,1[$
   $$-\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n n x^{n-1}$$
   d'où appliquée à x^2, puisque $x^2 \in [0,1[$, en changeant aussi le signe
   $$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} n x^{2n-2}$$
   puis en multipliant par x^3,
   $$\frac{x^3}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} n x^{2n+1} = f(x).$$
4. La fonction $g : x \mapsto \frac{x^3}{(1+x^2)^2}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et on a $f(x) = g(x)$ sur $]-1,1[$. Donc la fonction f peut se prolonger en la fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Nous avons
   $$g(1) = \frac{1}{4} \qquad g(-1) = -\frac{1}{4}.$$
5. Par contre, la série entière ne converge ni pour $x = 1$, ni pour $x = -1$ puisque dans les deux cas, son terme général $((-1)^{n+1}nx^{2n+1})$ ne tend pas vers 0. Ainsi le domaine réel de convergence de notre série entière est $]-1,1[$.
6. Si la convergence était uniforme sur $]-1,1[$, comme chaque fonction f_n admet comme limite $(-1)^{n+1}n$ lorsque x tend vers 1, d'après le théorème de la double limite, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0}(1)^{n+1}n$ devrait être convergente, ce qui n'est pas le cas. Ainsi la série de fonctions n'est pas uniformément convergente sur $]-1,1[$ (et pas non plus ni sur $[0,1[$, ni sur $]-1,0]$.)

Exercice B :

1. $I_1 = 1$, $I_2 = 2$.
2. On sait qu'il y a $n!$ bijections de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,n\}$.
3. Nous avons 6 permutations sur 3 éléments
   et seules les 4 premières sont des involutions, et ainsi $I_3 = 4$.

4. Il y a I_{n+1} involutions de $\{1,\dots,n+1\}$. Parmi les involutions de $\{1,\dots,n+1\}$, il y a celles qui :
– vérifient $f(n+1)=n+1$: alors la restriction e f à $\{1,\dots,n\}$ est une involution : il y en a I_n.
– vérifient $f(n+1)=a$, $1\leqslant a\leqslant n$ soit n choix possibles pour cette valeur de a ; alors $f(a)=n+1$, et la restriction de f à $\{1,\dots,n\}\setminus\{a\}$ est bien définie et est une involution, sur un ensemble de $n-1$ éléments. Il y en a nI_{n-1}.
Donc $I_{n+1}=I_n+nI_{n-1}$.
5. Notons R le rayon de la série entière. On sait que $I_n\leqslant n!$ d'après 2. Ainsi $\frac{I_n}{n!}\leqslant 1$ et donc $R\geqslant R\left(\sum x^n\right)=1$, d'où le résultat.
6. Soit $x\in]-1,1[$, on sait que

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^n \qquad S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}n\frac{I_n}{n!}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_n}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_{n+1}}{n!}x^n$$

et ainsi par exemple

$$\begin{aligned}S'(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_{n+1}}{n!}x^n=I_1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_{n+1}}{n!}x^n\\&=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_n+nI_{n-1}}{n!}x^n\\&=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_{n-1}}{(n-1)!}x^n\\&=1+S(x)-1+xS(x)=(1+x)S(x)\end{aligned}$$

7. Ainsi S est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle $y'-(1+x)y=0$, dont les solutions sont les fonctions

$$x\mapsto\lambda\mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}}$$

Comme $S(0)=I_0=1$, on a sur $]-1,1[$, $(\lambda=1)$

$$S(x)=\mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}}$$

8. On écrit alors

$$S(x)=\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

et nous devons faire un produit de Cauchy peu sympathique. Posons

$$\mathrm{e}^{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \qquad \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$$

nous avons

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^n$$

avec donc

$$c_n\sum_{k=0}^{n}b_ka_{n-k}=\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\frac{1}{2^kk!}\frac{1}{(n-2k)!}$$

et ainsi

$$I_n = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \frac{1}{2^k}\frac{n!}{k!(n-2k)!}$$

Par exemple, pour vérification,

$$I_3 = 4 = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant 3} \frac{1}{2^k}\frac{3!}{k!(3-2k)!} = 1 + \frac{1}{2}\times 6 = 4$$

et $I_4 = I_3 + 3I_2 = 4 + 6 = 10$,

$$I_4 = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant 4} \frac{1}{2^k}\frac{4!}{k!(4-2k)!} = 1 + \frac{1}{2}\times 12 + \frac{1}{4}\times 12 = 10$$

Sujet A :

Partie I :

1. On rappelle que pour $x \in]-1,1[$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$$

et ainsi

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}$$

et par intégration

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

le rayon étant 1. Ainsi, pour $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{1}{\sqrt{3}3^k} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^k\frac{1}{2k+1}$$

et ainsi

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^k\frac{1}{2k+1} = \sqrt{3}\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}}$$

2. Soit $x \in [0,1]$, la série numérique

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

est une série alternée, et elle vérifie le critère spécial de Leibniz puisque la suite (x^{2k+1}) est décroissante (strictement décroissante vers 0 si $x \in [0,1[$ et constante si $x = 1$ et la suite $\left(\frac{1}{2k+1}\right)$ décroissante vers 0 et donc ainsi par produit, la suite $\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right)$ est décroissante vers 0. Ainsi la série est convergente, on sait que le reste $R_n(x)$défini par

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

vérifie

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{x^{2(n+1)+1}}{2(n+1)+1}$$

et donc

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n+3}$$

On en déduit que

$$\| R_n \|_{\infty,[0,1]} \leqslant \frac{1}{2n+3}$$

et donc la suite numérique $(\| R_n \|_{\infty,[0,1]})$ converge vers 0. Ainsi la suite des restes (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle et donc la suite de fonctions $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$ converge uniformément sur $[0,1]$. Comme il s'agit d'une série de fonctions continues, la somme S définie une fonction continue sur $[0,1]$. Ainsi la relation

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = S(x)$$

vraie pour $x \in]-1,1[$ peut être prolongée en 1, et donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}}$$

3. En intégrant par parties, pour tout x réel, on a

$$\int_0^x \operatorname{Arctan} t \mathrm{d}t = [t \operatorname{Arctan} t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} \mathrm{d}t = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

Or on a vu que la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

qui est une série de fonction continues sur $[0,1]$ converge uniformément sur $[0,1]$, et ainsi d'après le théorème d'intégration terme à terme, on a la convergence des termes en jeux et

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \mathrm{d}x$$

soit encore

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan} x \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)}$$

d'où puisque

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan} x \mathrm{d}x = \operatorname{Arctan} 1 - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}}$$

4. Soit $x \in]-1,1[$, on a

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

et aussi

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

d'où

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}+1}{n} x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[\,,\ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

On a donc un rayon R avec $R \geqslant 1$. De plus, pour $x = 1$, la série diverge puisque son terme général est $\frac{1}{2n+1}$ équivalent à $\frac{1}{2n}$ et positif. Ainsi $R = 1$.
Sur $]-1,1[$, on a alors

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$$

et ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x$$

et de la même façon

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+3}}{4n+3} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x$$

Partie II :

1. Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon R avec $R > 0$. On pose sur $]-R,R[$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On sait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ que l'on peut dériver terme à terme et ainsi

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

puis

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \end{aligned}$$

Alors f est solution de (E) si et seulement si pour tout x de $]-R,R[$, on a

$$2x^2f''+2xf''+5xf'+3f'+y=0$$

soit en remplaçant

$$\sum_{n=0}^{+\infty}2n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}2(n+1)na_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}5na_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}3(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0$$

soit encore par unicité du développement en série entière de la fonction nulle

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[2n(n-1)a_n+2(n+1)na_{n+1}+5na_n+3(n+1)a_{n+1}+a_n\right]x^n=0$$

soit encore

$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\ [2n(n-1)+5n+1]a_n+[2n(n+1)+3(n+1)]a_{n+1}=0$$

soit encore

$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\ (2n^2+3n+1)a_n+(n+1)(2n+3)a_{n+1}=0$$

c'est à dire

$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\ a_{n+1}=-\frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+3)(n+1)}=-\frac{2n+1}{2n+3}a_n$$

soit encore en itérant (ou en faisant une récurrence)

$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\ a_n=\frac{(-1)^n}{2n+1}a_0$$

La série entière $\sum\frac{(-1)^n}{2n+1}x^n$ est de rayon 1. Ainsi les solutions de (E) développables en séries entière en 0 sont les fonctions f définies

$$f(x)=a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^n$$

sur au moins $]-1,1[$.

2. Si $x\in]0,1[$, on écrit

$$f(x)=a_0\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(\sqrt{x})^{2n+1}=a_0\frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Si $x\in]-1,0[$,

$$f(x)=a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(\sqrt{-x})^{2n+1}=a_0\frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$$

3. Ainsi la fonction $f:x\mapsto\frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ est une solution de (E) sur $]0,1[$. On peut alors vérifier que en fait elle est solution sur $]0,\infty[$ en calculant $f'(x)$ et $f''(x)$.

Partie III :

1. Pour $x \in]-1,1[$,

$$u_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{4n+3}\left(\frac{(4n+3)x^{2n}}{4n+1} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x^{2n+1}}{4n+3}$$

et ainsi

$$|u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{[x|^{2n+1}}{4n+3} \leqslant |x|^{2n+1} \leqslant |x|^n$$

et ainsi la série $\sum |u_n(x)|$ est convergente, donc $\sum u_n(x)$ absolument convergente donc convergente.

Si $x = 1$ ou $x = -1$,

$$|u_n(x)| = \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} = \frac{2}{(4n+1)(4n+3)} \sim \frac{1}{8n^2}$$

et ainsi la $\sum |u_n(x)|$ est convergente, donc $\sum u_n(x)$ absolument convergente donc convergente.

Si $|x| > 1$,

$$|u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|x|^{4n+1}}{4n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et ainsi la série $\sum u_n(x)$ est grossièrement divergente.

On en déduit que le domaine réel de convergence est $[-1,1]$.

2. Si $x \in]0,1[$, les deux séries

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$$

sont convergentes et ainsi d'après la question I.4.

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{4n+3} \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}^{4n+2}}{4n+3} \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x - \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}^{4n+3}}{4n+3} \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x - \frac{1}{4\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{Arctan}\sqrt{x}
\end{aligned}$$

$S(x)$ est la somme de

$$\frac{1}{4}\ln(1+x) + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x - \frac{1}{4\sqrt{x}}\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{Arctan}\sqrt{x}$$

qui admet une limite finie en 1^- qui est

$$\frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} 1 - \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} 1 = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$$

et

$$-\frac{1}{4}\ln(1-x) + \frac{1}{4\sqrt{x}}\ln\left(1-\sqrt{x}\right)$$

dont on étudie le comportement en 1^-, la limite de la somme étant indéterminée :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{4\sqrt{x}}\ln\left(1-\sqrt{x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left[-\ln(1+\sqrt{x})-\ln(1-\sqrt{x})+\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(1-\sqrt{x})\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[-\ln(1+\sqrt{x})+\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ln(1-\sqrt{x})\right] \end{aligned}$$

dont la limite en 1^- est $-\frac{\ln 2}{4}$. Ainsi

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{\pi - \ln 2}{4}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N}\left[\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}\right] &= \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{4n+1}-\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{4n+3} \\ &= \sum_{n=0}^{2N+1}\frac{(-1)^n}{2n+1} \\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

et ainsi $S(1)=\frac{\pi}{4}$.

Les fonctions u_n sont continues sur $[0,1]$. Si la série $\sum u_n$ était uniformément convergente sur $[0,1]$, sa somme S serait continue sur $[0,1]$ ce qui n'est pas le cas puisque $S(1) \neq \lim_{x\to 1^-} S(x)$. Ainsi la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Si la série de fonctions $\sum u_n$ était uniformément convergente sur $[0,1[$, on aurait comme $\sum u_n(1)$ est convergente,

$$\| S-S_n \|_{\infty,[0,1]} = \max\{\| S-S_n \|_{\infty,[0,1[}, |S(1)-S_n(1)|\}$$

qui converge vers 0 et ainsi la série de fonctions $\sum u_n$ serait aussi uniformément convergente sur $[0,1]$, ce qui n'est pas le cas.
donc la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1[$ non plus.

Sujet B :

1. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto \cos(x\sin t)$ est une fonction continue sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et on peut donc définir l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin t)\mathrm{d}t$$

et ainsi $J(x)$ est bien défini. Comme pour tout u réel on a

$$\cos u = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}u^{2n}$$

on obtient si x réel

$$J(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x\sin t)^{2n}\mathrm{d}t$$

(b) Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$|f_n(t)| \leqslant \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$$

et ainsi $\| f_n \|_\infty \leqslant \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$. Or la série numérique

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$$

est convergente, et ainsi la série $\sum \| f_n \|_\infty$ aussi. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et les fonctions f_n sont continues, ainsi on peut intégrer terme à terme et ainsi

$$J(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x \sin t)^{2n} \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x \sin t)^{2n} \mathrm{d}t$$

soit encore

$$J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{2(-1)^n}{\pi(2n)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} \mathrm{d}t \right] x^{2n}$$

et cela pour tout x réel. Ainsi la fonction J est développable en série entière en 0 et cela avec un rayon infini.

2. (a) On a $a_0 = \frac{\pi}{2}$.

(b) Soit $n \geqslant 1$, nous avons par intégration par parties

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} \mathrm{d}t \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t (\sin t)^{2n-1} \mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\left[-\cos t (\sin t)^{2n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos t (2n-1) \cos t (\sin t)^{2n-2} \mathrm{d}t \\
&= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t (\sin t)^{2n-2} \mathrm{d}t \\
&= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) t (\sin t)^{2n-2} \mathrm{d}t \\
&= (2n-1)(a_{n-1} - a_n)
\end{aligned}$$

et ainsi $2na_n = (2n-1)a_{n-1}$ soit finalement la relation de récurrence simple

$$\forall n \geqslant 1 \,,\, a_n = \frac{2n-1}{2n} a_{n-1}$$

(c) On trouve empiriquement la formule donnée facilement en itérant la relation précédente. Pour la démontrer, on procède par récurrence sur n. La relation est vérifiée si $n = 0$. On la suppose vraie au rang n. Alors

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{2n+1}{2n+2} a_n \\
&= \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{\pi}{2^{2n+1}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\
&= \frac{\pi}{2^{2n+2}} \times \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(2n+2)(n!)^2} \\
&= \frac{\pi}{2^{2n+3}} \times \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

(d) On en déduit que si $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire en reportant

$$J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Ainsi la fonction de Bessel J est développable en série entière en 0 avec une série entière de rayon infini.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$J(-x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(-x \sin t) \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin t) \mathrm{d}t = J(x)$$

Ainsi la fonction J est une fonction paire. On a de plus, soit par la définition, soit par l'expression en série entière :

$$J(0) = 1$$

D'autre part, on a si x réel,

$$|J(x)| \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(x \sin t)| \mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = 1$$

Ainsi $\| J \|_\infty \leqslant 1$, et comme $J(0) = 1$, on a finalement $\| J \|_\infty = 1$.

4. Soit $x \in]0, 6[$, la série numérique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

est une série alternée. Posons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!}$$

La suite (a_n) converge vers 0 puisque

$$a_n \leqslant \frac{3^n}{n!}$$

On a aussi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{2(n+1)} \leqslant \frac{3}{n+1} \leqslant 1$$

mais à partir de $n = 2$ uniquement. Ainsi $(a_n)_{n \geqslant 2}$ est décroissante, vers 0. Son carré aussi. Ainsi la série alternée

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

vérifie le critère spécial des séries alternée, à partir du rang 2. On peut alors en déduire que $R_1(x)$ et $R_2(x)$ sont du signe du premier terme de leur série, c'est à dire positif et négatif. On a alors

$$J(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + R_1(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{4}$$

et

$$J(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{32} + R_2(x) \leqslant 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}$$

et donc finalement

$$1 - \frac{x^2}{4} \leqslant J(x) \leqslant 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}$$

ce qui se représente graphiquement (les deux fonctions encadrantes)