Devoir surveillé n°5
3 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Exercice I

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice dite de Frobenius. On pose aussi

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} , \ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \right\}$$

On $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. On rappelle à toute fin utile que les racines cubiques de l'unité sont $1, j, j^2$ avec $j^2 = \overline{j} = \frac{1}{j}$, $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$.

1. (*) Calculer F^2 et montrer que
$$\mathcal{E} = \{xI + yF + zF^2 \, , \ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3\}$$
2. (*) En déduire que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont on donnera une base et la dimension.
3. (*) Calculer F^3 et en déduire que le produit de deux éléments de $\mathcal{E}$ commute et reste dans $\mathcal{E}$.
4. (*) Montrer que
$$\chi_F(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - j)(\lambda - j^2)$$
5. (*) En déduire que F est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, et qu'il existe une matrice complexe P inversible telle que $F = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(1, j, j^2)$. On ne demande pas ici de préciser la matrice P.
6. (*) Montrer que F^2 est aussi diagonalisable et exprimer F^2 à l'aide de P et D.

7. (**) En déduire que tous les éléments $A = xI_3 + yF + zF^2$ de $\mathcal{E}$ sont diagonalisables dans une même base et préciser une matrice diagonale semblable à A.
8. (*) En déduire une expression factorisée du déterminant de $A = xI_3 + yF + zF^2$, puis donner une condition nécessaire et suffisante pour la matrice A soit inversible.
9. (*) Déterminer les espaces propres de F et en déduire que l'on peut choisir pour P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

10. Soit A un élément de $\mathcal{E}$ inversible. On établit dans cette question que $A^{-1} \in \mathcal{E}$, sans calculer A^{-1}.
    (a) (*) Montrer que l'application

    $$\Phi : \begin{aligned} \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ M &\longmapsto AM \end{aligned}$$

    est un endomorphisme.
    (b) (**) Montrer que Φ est un automorphisme.
    (c) (*) En déduire que $A^{-1} \in \mathcal{E}$.

Exercice II : CCP 2018 extraits

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.

On considère l'application Φ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \, , \, \Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$. Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*.

1. (a) (*) Déterminer L_0 et L_1 et vérifier que $L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)$.

   (b) (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que L_n est de degré n.
   (c) (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. (*) Prouver que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

   Dans la suite, n désigne un entier naturel.
3. (*) Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Φ.

   On note Φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Φ. Cet endomorphisme Φ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \, , \, \Phi_n(P) = \Phi(P)$.

4. (*) On note $M = (m_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de Φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n(X)$. Montrer que la matrice M est triangulaire supérieure et que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \,, \; m_{k,k} = k(k+1).$$

5. (*) Montrer que Φ_n est diagonalisable. *On pourra utiliser la question précédente.*
6. (*) Vérifier que :
$$\forall k \in [\![0, n]\!] \,, \; (X^2 - 1)U_k' - 2kXU_k = 0.$$
7. (**) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question précédente, montrer grâce à la formule de Leibniz [1] que

$$(X^2 - 1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$$

8. (*) Montrer que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme L_k est un vecteur propre de Φ_n, en précisant la valeur propre associée. *On pourra utiliser la question précédente.*
9. (***) Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de Φ.

Exercice III :

On considère l'ensemble E de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles (u_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \,, \; u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$$

1. (*) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles.
2. (*) Déterminer la matrice A telle que la suite (u_n) appartient à E si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N} \,, \; X_{n+1} = AX_n$$

avec

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$$

3. (*) Démontrer que si la suite (u_n) appartient à E, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \,, \; X_n = A^n X_0.$$

4. (*) Montrer que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = (X-1)^3$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
5. (*) Montrer que l'espace propre $E_1(A)$ est une droite vectorielle dont on précisera un vecteur directeur.
6. (*) On pose $N = A - I_3$ et on note a et n les endomorphismes canoniquement associés à A et N. Déterminer N^2 et vérifier que $N^3 = 0$.
7. (*) On pose $w = (1, 0, 0)$. Montrer que $w \notin \operatorname{Ker} N^2$.

---

1. si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, alors le produit fg aussi et on a

$$(fg)^{(p)} = \sum_{i=0}^{p} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(p-i)}$$

La formule n'était pas donnée dans l'énoncé original.

8. (**) On pose alors $v = n(w)$ et $u = n(v) = n^2(w)$. Vérifier que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et préciser P la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v, w). Donner les matrices de n puis a relativement à la base (u, v, w).
9. (**) Montrer que l'on a $A = PTP^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. (**) Calculer T^n pour tout entier naturel n.
11. (**) Déterminer la matrice P^{-1}. En déduire que si (u_n) est un élément de E, alors

$$(u_n) \in \mathrm{Vect}((1), (n), (n^2))$$

12. Montrer que $E = \mathrm{Vect}((1), (n), (n^2))$.
13. (**) En déduire la dimension et une base de l'espace vectoriel E. Quelles sont les coordonnées d'un élément (u_n) de E dans cette base ?