Devoir surveillé n°5
3 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Exercice I

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice dite de Frobenius. On pose aussi

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} , \, (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \right\}$$

On $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. On rappelle à toute fin utile que les racines cubiques de l'unité sont $1, j, j^2$ avec $j^2 = \overline{j} = \frac{1}{j}$, $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$.

1. (*) Calculer F^2 et montrer que
$$\mathcal{E} = \{xI + yF + zF^2 \, , \, (x, y, z) \in \mathbb{C}^3\}$$
2. (*) En déduire que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont on donnera une base et la dimension.
3. (*) Calculer F^3 et en déduire que le produit de deux éléments de $\mathcal{E}$ commute et reste dans $\mathcal{E}$.
4. (*) Montrer que
$$\chi_F(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - j)(\lambda - j^2)$$
5. (*) En déduire que F est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, et qu'il existe une matrice complexe P inversible telle que $F = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(1, j, j^2)$. On ne demande pas ici de préciser la matrice P.
6. (*) Montrer que F^2 est aussi diagonalisable et exprimer F^2 à l'aide de P et D.

7. (**) En déduire que tous les éléments $A = xI_3 + yF + zF^2$ de $\mathcal{E}$ sont diagonalisables dans une même base et préciser une matrice diagonale semblable à A.
8. (*) En déduire une expression factorisée du déterminant de $A = xI_3 + yF + zF^2$, puis donner une condition nécessaire et suffisante pour la matrice A soit inversible.
9. (*) Déterminer les espaces propres de F et en déduire que l'on peut choisir pour P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

10. Soit A un élément de $\mathcal{E}$ inversible. On établit dans cette question que $A^{-1} \in \mathcal{E}$, sans calculer A^{-1}.
    (a) (*) Montrer que l'application

    $$\Phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$$

    est un endomorphisme.
    (b) (**) Montrer que Φ est un automorphisme.
    (c) (*) En déduire que $A^{-1} \in \mathcal{E}$.

Exercice II : CCP 2018 extraits

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.

On considère l'application Φ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X]\,,\ \Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$. Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*.

1. (a) (*) Déterminer L_0 et L_1 et vérifier que $L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)$.

   (b) (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que L_n est de degré n.
   (c) (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. (*) Prouver que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

   Dans la suite, n désigne un entier naturel.
3. (*) Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Φ.

   On note Φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Φ. Cet endomorphisme Φ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]\,,\ \Phi_n(P) = \Phi(P)$.

4. (*) On note $M = (m_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de Φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n(X)$. Montrer que la matrice M est triangulaire supérieure et que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \, , \, m_{k,k} = k(k+1).$$

5. (*) Montrer que Φ_n est diagonalisable. *On pourra utiliser la question précédente.*
6. (*) Vérifier que :
$$\forall k \in [\![0, n]\!] \, , \, (X^2 - 1)U_k' - 2kXU_k = 0.$$
7. (**) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question précédente, montrer grâce à la formule de Leibniz[1] que

$$(X^2 - 1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$$

8. (*) Montrer que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme L_k est un vecteur propre de Φ_n, en précisant la valeur propre associée. *On pourra utiliser la question précédente.*
9. (***) Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de Φ.

Exercice III :

On considère l'ensemble E de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles (u_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \, , \, u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$$

1. (*) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles.
2. (*) Déterminer la matrice A telle que la suite (u_n) appartient à E si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N} \, , \, X_{n+1} = AX_n$$

avec

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$$

3. (*) Démontrer que si la suite (u_n) appartient à E, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \, , \, X_n = A^n X_0.$$

4. (*) Montrer que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = (X-1)^3$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
5. (*) Montrer que l'espace propre $E_1(A)$ est une droite vectorielle dont on précisera un vecteur directeur.
6. (*) On pose $N = A - I_3$ et on note a et n les endomorphismes canoniquement associés à A et N. Déterminer N^2 et vérifier que $N^3 = 0$.
7. (*) On pose $w = (1, 0, 0)$. Montrer que $w \notin \operatorname{Ker} N^2$.

---

1. si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, alors le produit fg aussi et on a

$$(fg)^{(p)} = \sum_{i=0}^{p} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(p-i)}$$

La formule n'était pas donnée dans l'énoncé original.

8. (**) On pose alors $v = n(w)$ et $u = n(v) = n^2(w)$. Vérifier que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et préciser P la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v, w). Donner les matrices de n puis a relativement à la base (u, v, w).
9. (**) Montrer que l'on a $A = PTP^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. (**) Calculer T^n pour tout entier naturel n.
11. (**) Déterminer la matrice P^{-1}. En déduire que si (u_n) est un élément de E, alors

$$(u_n) \in \mathrm{Vect}((1), (n), (n^2))$$

12. Montrer que $E = \mathrm{Vect}((1), (n), (n^2))$.
13. (**) En déduire la dimension et une base de l'espace vectoriel E. Quelles sont les coordonnées d'un élément (u_n) de E dans cette base ?

Exercice 1

1. On a
$$F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Ainsi pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, on peut écrire
$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & z \\ y & z & x \end{pmatrix} = xI_3 + yF + zF^2$$
d'où le résultat.
2. On en déduit que $\mathcal{E} = \text{Vect}((I_3, F, F^2))$ et ainsi $\mathcal{E}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ engendré par la famille de 3 vecteurs (I_3, F, F^2). On vérifie alors que cette famille est libre, ce qui permettra d'en déduire qu'elle est une base de $\mathcal{E}$ et que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension 3 : si pour $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$
$$xI_3 + yf + zF^2 = 0$$
alors
$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & z \\ y & z & x \end{pmatrix} = xI_3 + yF + zF = 0$$
et ainsi $x = y = z = 0$; la famille (I_3, F, F^2) est bien libre et nous avons nos conclusions.
3. On a
$$F^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$
Soit A et A' deux éléments de $\mathcal{E}$, on écrit
$$A = xI_3 + yF + zF^2 \qquad A' = x'I_3 + y'F + z'F^2$$
alors sachant que $F^3 = I_3$ et que donc $F^4 = F$,
$$\begin{aligned} AA' &= (xI_3 + yF + zF^2)(x'I_3 + y'F + z'F^2) \\ &= xx'I_3 + (yx' + xy')F + (xz' + zx')F^2 + (yz' + zy')F^3 + zz'F^4 \\ &= (xx' + xz' + zx')I_3 + (yx' + xy' + zz')F + (xz' + zx')F^2 \end{aligned}$$
et donc $AA' \in \mathcal{E}$, et de plus on constate (par symétrie, ou en échangeant les rôles de A et A', c'est à dire les rôles de (x, y, z) et (x', y', z')) que $AA' = A'A$. Ainsi le produit de deux éléments de $\mathcal{E}$ commute et reste dans $\mathcal{E}$.
4. On détermine le polynôme caractéristique de F : on a si λ complexe,
$$\chi_F(\lambda) = \det(\lambda I_3 - F) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$$

$$\chi_F(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$
$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-1)(\lambda(\lambda+1)+1) = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1) = \lambda^3 - 1$$

Et ainsi (racines cubiques de l'unité)

$$\chi_F(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-j)(\lambda-j^2).$$

5. Ainsi la matrice F admet 3 racines distinctes dans $\mathbb{C}$ et elle est de taille 3 ; elle est donc diagonalisable, et donc semblable à une matrice diagonale, dont la diagonale est constituée des valeurs propres répétées selon leurs multiplicités. Il existe ainsi une marice P inversible telle que $F = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(1, j, j^2)$.
6. On a alors $F^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^1$ avec $D^2 = \mathrm{diag}(1, j^2, j^4) = \mathrm{diag}(1, j^2, j)$. Donc F^2 est semblable à une matrice diagonale, donc diagonnalisable (avec la même matrice de diagonlisation P).
7. Soit $A = xI_3 + yF + zF^2$ un élément de $\mathcal{E}$, on peut donc écrire

$$A = xPP^{-1} + +yPDP^{-1} + zPD^2P^{-1} = P(xI_3 + yD + zD^2)P^{-1}$$

avec en fait A semblable à

$$xI_3 + yD + zD^2 = \begin{pmatrix} x+y+z & 0 & 0 \\ 0 & x+jy+j^2z & 0 \\ 0 & 0 & x+j^2y+zj \end{pmatrix}$$

diagonale. Ainsi A est diagonalisable, à l'aide de P.
Ainsi tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont diagonalisables dans une même base.
8. On en déduit aussi que

$$\det(A) = \det(xI_3 + yD + zD^2) = (x+y+z)(x+jy+j^2z)(x+j^2y+jz)$$

et ainsi la matrice A est inversible si et seulement si

$$\begin{cases} x+y+z \neq 0 \\ x+jy+j^2z \neq 0 \\ x+j^2y+jz \neq 0 \end{cases}$$

9. Nous avons

$$FX = 1.X \iff \begin{cases} y = x \\ z = y \\ x = z \end{cases} \iff (x,y,z) = x(1,1,1)$$

Ainsi $E_1(F) = \mathrm{Vect}((1,1,1))$.

$$FX = j.X \iff \begin{cases} y = jx \\ z = jy \\ x = jz \end{cases} \iff \begin{cases} y = jx \\ z = jy = j^2x \\ x = jz = j^3x = x \end{cases}$$
$$\iff (x,y,z) = x(1,j,j^2)$$

Ainsi $E_j(F) = \text{Vect}((1, j, j^2))$. Et de même

$$FX = j^2.X \iff \begin{cases} y = j^2x \\ z = j^2y \\ x = j^2z \end{cases} \iff \begin{cases} y = j^2x \\ z = j^2y = j^4x = jx \\ x = j^2z = j^3x = x \end{cases}$$
$$\iff (x, y, z) = x(1, j^2, j)$$

Ainsi $E_j(F) = \text{Vect}((1, j^2, j))$. Ainsi on peut choisir P la matrice donnée avec $D = \text{diag}(1, j, j^2)$.

10. On vérifie que Φ est bien définie ; si $M \in \mathcal{E}$, comme A est dans $\mathcal{E}$, le produit AM aussi vu la stabilité de $\mathcal{E}$ pour le produit matriciel.
On vérifie ensuite que Φ est linéaire. Si $(M, N) \in \mathcal{E}^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, alors
$$\Phi(\lambda M + \mu N) = A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN = \lambda\Phi(M) + \mu\Phi(N)$$
Finalement, on en déduit que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
Comme $\mathcal{E}$ est de dimension finie, on vérifie alors seulement que Φ est injective. Si $M \in \text{Ker}\,\Phi$, alors $\Phi(M) = 0$, $AM = 0$ et comme A inversible, $A^{-1}AM = 0$ soit finalement $M = 0$. Donc Φ est bien injective, et finalement, c'est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

Comme $I_3 \in \mathcal{E}$ (arrivée de Φ), il existe $B \in \mathcal{E}$ (départ de Φ) telle que $\Phi(B) = I_3$ soit $AB = I_3$. Ainsi B est l'inverse à droite de A donc en fait l'inverse, et ainsi $A^{-1} = B \in \mathcal{E}$.

Exercice 2

1. (a) On a $L_0 = \dfrac{1}{2^0 0!}U_0^{(0)} = U_0 = 1$ et
$$L_1 = \frac{1}{2^1 1!}U_1' = \frac{1}{2}(X^2 - 1)' = X$$
et pour finir
$$L_2 = \frac{1}{2^2 2!}((X^2 - 1)^2)'' = \frac{1}{8}(2.2X(X^2 - 1))' = \frac{1}{2}(X^3 - X)' = \frac{1}{2}(3X^2 - 1).$$
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, L_n est de degré le degré de $U_n^{(n)}$ et comme U_n est de degré $2n$, $U_n^{(n)}$ est de degré $2n - n = n$. Ainsi le polynôme L_n est de degré n.
   (c) La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est donc une famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP' \in \mathbb{R}[X]$.
D'autre part, soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P + \mu Q) &= (X^2 - 1)(\lambda P + \mu Q)'' + 2X(\lambda P + \mu Q)' \\ &= \lambda[(X^2 - 1)P'' + 2XP] + \mu[(X^2 - 1)Q'' + 2XQ'] \\ &= \lambda\Phi(P) + \mu\Phi(Q)\end{aligned}$$
Ainsi Φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $Q \in \Phi(\mathbb{R}_n[X])$, on peut écrire $Q = \Phi(P)$ avec $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $Q = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$. Or on a
$$\begin{aligned}\deg(X^2 - 1)P'') &= 2 + \deg(P'') \leqslant 2 + \deg P - 2 = \deg(P) \\ \deg(2XP') &= 1 + \deg(P') \leqslant 1 + \deg(P) - 1 = \deg(P)\end{aligned}$$
et ainsi $\deg(Q) \leqslant n$ et donc $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. On a donc $\Phi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ ce qui montre que $\mathbb{R}_n[x]$ est stable par l'opérateur Φ.

4. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$, on a

$$\Phi(X^k) = (X^2-1)(X^k)''+2X(X^k)' = (X^2-1)k(k-1)X^{k-2}+2kXX^{k-1} = k(k+1)X^k-k(k-1)X^{k-2}$$

Ainsi $m_{k,k} = k(k+1)$ et comme $\Phi(X^k)$ combinaison linéaire de $1, X, \dots, X^k$, la matrice M est triangulaire supérieure. On a plus précisément

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

5. On en déduit que le polynôme caractéristique de M, donc de Φ est

$$\chi_M(\lambda) = \prod_{k=0}^{n}(X - k(k+1))$$

Or la suite $(n(n+1)$ est une suite strictement croissante (somme de (n) et (n^2) strictement croissantes) et ainsi elle prend des valeurs deux à deux distinctes. Ainsi M admet exactement $n+1$ valeurs propres distinctes et comme nous sommes en dimension $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, on peut en déduire que la matrice M est diagonalisable.

6. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$, on a

$$(X^2-1)U_k' = (X^2-1)((X^2-1)^k)' = 2kX(X^2-1)(X^2-1)^{k-1} = 2kX(X^2-1)^k = 2kXU_k$$

7. On dérive $k+1$ fois la relation précédente, en appliquant la formule de Leibniz, les fonctions polynomiales étant de classe $\mathcal{C}^\infty$,

$$\begin{aligned} \left[(X^2-1)U_k'\right]^{(k+1)} &= \binom{k+1}{0}(X^2-1)(U_k')^{(k+1)} + \binom{k+1}{1}2X(U_k')^{(k)} + \binom{k+1}{2}2(U_k')^{(k-1)} \\ &= (X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2(k+1)XU_k^{(k+1)} + k(k+1)U_k^{(k)} \end{aligned}$$

et

$$[XU_k]^{(k+1)} = \binom{k+1}{0}XU_k^{(k+1)} + \binom{k+1}{1}U_k^{(k)} = XU_k^{(k+1)} + (k+1)U_k^{(k)}$$

et ainsi en regroupant

$$(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$$

8. D'après la question précédente,

$$\Phi_n(U_k^{(k)}) = (X^2-1)U_lk^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} = k(k+1)U_k^{(k)}$$

et ainsi en divisant par $\frac{1}{2^k k!}$,

$$\Phi_n(L_k) = k(k+1)L_k$$

Ainsi L_k est vecteur propre de Φ_n de valeur propre associée $k(k+1)$.

9. Comme $\Phi(L_k) = \Phi_n(L_k) = k(k+1)L_k$, nous obtenons que $k(k+1)$ est une valeur propre de Φ est que L_k est un vecteur propre associé.
Réciproquement, si λ est une valeur propre de Φ, il existe un polynôme non nul P de sorte que $\Phi(P) = \lambda P$.
Si on note n le degré de P, on écrit alors $\Phi(P) = \Phi_n(P) = \lambda P$. Ainsi λ est une valeur propre de Φ_n avec un vecteur propre associé de degré P. D'après la question précédente, il existe alors $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $\lambda = k(k+1)$ avec P colinéaire à L_k, et vu les degrés on a en fait $k = n$ et l'espace propre associé à $n(n+1)$ est la droite engendrée par L_n.

   Ainsi, les valeurs propres de Φ sont les $n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$ et l'espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par L_n.

Exercice III

1. On a $E \subset R^{\mathbb{N}}$ et E non vide puisque la suite nulle est bien dans E.
Soit (u_n) et (v_n) deux éléments de E et λ, μ deux réels, on pose $(w_n) = \lambda(u_n) + \mu(v_n)$. On a alors si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+3} &= \lambda u_{n+3} + \mu v_{n+3} \\ &= \lambda(3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n) + \mu(v_{n+2} - 3v_{n+1} + v_n) \\ &= 3(\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2}) - 3(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} + (\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= 3w_{n+2} - 3w_{n+1} + w_n \end{aligned}$$

   et ainsi la suite (w_n) appartient à E.
Donc E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. La suite (u_n) appartient à E si et seulement si, pour tout n, on a

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$$

   soit encore $X_{n+1} = AX_n$ avec la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Soit (u_n) un élément de E. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$, $X_0 = A^0 X_0$ puisque $A^0 = I_3$.
Si on a $X_n = A^n X_0$ pour un certain entier n, alors

$$X_{n+1} = AX_n = A.A^n X_0 = A^{n+1} X_0$$

   ce qui achève la récurrence. Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ X_n = A^n X_0}$.
4. On sait que (ou on le retrouve) le polynôme caractéristique de A est donné par

$$\chi_A = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$$

et ainsi $\chi_A = (X-1)^3$. On en déduit que la matrice A admet une unique valeur propre 1. Si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice diagonale dont la diagonale serait constituée de 1, c'est à dire I_3, et donc il existerait une matrice inversible P telle que $A = PI_3P^{-1} = I_3$ ce qui est absurde. Ainsi la matrice A n'est pas diagonalisable.
Cependant, comme le polynôme caractéristique χ_A est scindé, la matrice A est trigonalisable.

5. On résout $AX = 1.X$: on a

$$AX = 1.X \iff \begin{cases} y = x \\ z = y \\ x - 3y + 3z = z \end{cases} \iff x = y = z$$

Ainsi $E_1(A) = \mathrm{Vect}((1,1,1))$.

6. On a donc

$$N = A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

puis

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad N^3 = 0$$

7. On a $NX = 0$ si et seulement si $x - 2y + z = 0$, équation d'un plan vectoriel.
On a bien $w = (1,0,0) \notin \operatorname{Ker} N^2$.

8. On pose $v = n(w)$ et $u = n(v)$ et ainsi on obtient matriciellement

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et ainsi $v = (-1, 0, 1)$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc $u = (1,1,1)$ (vecteur directeur de $E_1(A)$). La matrice de la famille (u, v, w) par rapport à la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

visiblement de rang 3 (en échangeant les lignes 2 et 3), et donc inversible. Ainsi (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de n dans la base (u, v, w) est alors

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puisque $n(u) = n^3(w) = 0$, $n(v) = u$ et $n(w) = v$. Ainsi la matrice de a est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

avec d'après la formule de changement de base $A = PTP^{-1}$.

9. On obtient

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soit par récurrence sur n (en ayant calculé T^2, T^3 et observé que ...), soit en remarquant que $T = I_3 + J$ avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J^3 = J^4 = \cdots = 0$$

et en appliquant la formule du binôme puisque I_3 et J commutent

$$T^n = (I_3 + J)^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2$$

valable si $n \geqslant 2$, mais aussi si $n = 0, 1$.

10. On obtient par le pivot de Gauss que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = PT^nP^{-1}X_0$$

et ainsi pour tout n, on obtient (ne s'occuper que de la première ligne)

$$u_n = u_0 + \left(-\frac{3}{2}u_0 + 2u_1 - \frac{u_2}{2}\right)n + \left(\frac{u_0}{2} - u_1 + \frac{u_2}{2}\right)$$

Ainsi (u_n) est de la forme $\alpha(1) + \beta(n) + \gamma(n^2)$.

11. On a donc $E \subset \mathrm{Vect}((1), (n), (n^2))$.
Réciproquement, on vérifie que la suite (1) est dans E, (n) puisque pour tout n, $n + 3 = 3(n+2) - 3(n+1) + n$, et (n^2) aussi puisque pour tout n, on a

$$(n+3)^2 = 3(n+2)^2 - 3(n+1)^2 + n^2$$

Ainsi $\mathrm{Vect}((1), (n), (n^2)) \subset E$ et donc $\mathrm{Vect}((1), (n), (n^2)) = E$.

12. On vérifie pour finir que $((1), (n), (n^2))$ est libre : en effet, si

$$a(1) + b(n) + c(n^2) = 0$$

alors pour tout entier n, $a + bn + cn^2 = 0$ et ainsi pour $n = 0$, $a = 0$, puis pour $n = 1$, $b + c = 0$ et donc $c = -b$, puis pour $n = 2$, on obtient $b = 0$. Ainsi $((1), (n), (n^2))$ base de E qui est de dimension 3.

La formule établie à la question précédente permet d'obtenir les coordonnées de la suite (u_n) dans la base $((1),(n),(n^2))$:

$$\left(u_0, -\frac{3}{2}u_0 + 2u_1 - \frac{u_2}{2}, \frac{u_0}{2} - u_1 + \frac{u_2}{2}\right)$$