Quinzaine 7 du 06/01 au 17/01

Chapitre 6 : *Probabilités*
Si Ω est un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω, on appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ telle que :
– $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, – pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements incompatibles (deux à deux disjoints),

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

(ce qui sous-entend la convergence de la série numérique ou la sommabilité de la famille dénombrable).

On appelle espace probabilisé un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $\mathcal{A}$ est une tribu et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Propriétés d'une probabilité : probabilité de l'événement impossible, probabilité de la réunion combinée à l'intersection, de l'événement contraire, de la différence, croissance.
Probabilité d'une réunion disjointe, d'une réunion quelconque de deux événements.

Propriétés :
– $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (et cas d'une intersection finie).
– Continuité croissante (*) : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que pour tout n, on ait $A_n \subset A_{n+1}$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

– Continuité décroissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que pour tout n, on ait $A_{n+1} \subset A_n$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

– Sous additivité : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements alors (avec conventions dans cas de divergence de la série) :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Dans le cas fini ou dénombrable avec la tribu totale, une probabilité est entièrement déterminée par la donnée des probabilités des singletons.
Équiprobabilité ou probabilité uniforme dans le cas fini ; détermination d'une probabilité par le rapport du nombre de cas favorables et du nombre de cas possibles.
Non existence de probabilité uniforme sur un univers dénombrable.
Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur un ensemble dénombrable $\{x_n\,,\, n \in \mathbb{N}\}$, alors $\mathbb{P}(\{x_n\})$ converge forcément vers 0. Lien entre probabilité sur un univers dénombrable et série numérique à termes positifs de somme non nulle.

Remarque : événement presque sûr ou quasi certain, négligeable ou presque impossible ou quasi impossible. Exemple.

Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Notations $\mathbb{P}_B(A)$, $\mathbb{P}(A|B)$. L'application $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ (*).
Formule de Bayes. Exemple d'utilisation.
Formule des probabilité composées.
Système complet fini ou dénombrable d'événements. Exemple usuel de $(A, \overline{A})$ avec A un événement. Exemple de système dénombrable.
Formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors la série $\sum \mathbb{P}(B \cap A_n)$ converge et (avec conventions si $\mathbb{P}(A_n)$ s'annule)

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n)$$

La formule reste valable dans le cas d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$ (système quasi-complet).
Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout y de $X(\Omega) = \operatorname{Im} X$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement.
Pour $A \subset X(\Omega)$, $(X \in A)$ est un événement. Notation $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$, $(X \geqslant x)$ et analogues lorsque X est à valeurs réelles.
Cas d'une variable aléatoire (discrète) à valeurs dans $\mathbb{N}$: liens entre $(X = n)$, $(X < n)$, $(X > n)$, $(X \leqslant n)$ et $(X \geqslant n)$, décomposition de $(X + Y = n)$.

Loi d'une variable aléatoire discrète. La loi de X notée $\mathbb{P}_X$ est déterminée par la donnée des $\mathbb{P}(X = x)$, $x \in X(\Omega)$.
On note $X \sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loi, sans soulever de difficulté sur cette notation.
Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

Couple de variables aléatoires discrètes. Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X = x, Y = y)$. Loi conjointe, lois marginales. La loi conjointe permet de déterminer les lois marginales (la réciproque est fausse, exemple).

Pour p dans $]0, 1[$, loi géométrique de paramètre p ; la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

Notation $X \sim \mathcal{G}(p)$. (Espérance $\frac{1}{p}$).
La loi géométrique peut être interprétée comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
On a pour tout entier n, $\mathbb{P}(X > n) = (1 - p)^n$ (*).

Caractérisation comme loi dans mémoire (ce n'est plus au programme officiel)

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X > n + k | X > n) = \mathbb{P}(X > k).$$

Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

Interprétation en termes d'événements rares, modélisation par une variable aléatoire où λ est le nombre moyen de cas par une certaine unité. Notation $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. (Espérance λ).

Indépendances de deux événements. L'indépendance n'est pas une notion intrinsèque, elle dépend du choix de la probabilité.
Si $\mathbb{P}(B) > 0$, l'indépendance de A et B est équivalente à $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.
Indépendance (mutuelle) d'une famille finie d'événements. L'indépendance deux à deux des événements $A_1, \ldots, A_n$ n'entraîne pas leur indépendance (mutuelle) si $n \geqslant 3$: un exemple avec $n = 3$.
Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ aussi (*). Extension au cas de n événements.

Deux variables aléatoires X et Y discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont dites indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants, c'est à dire si

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

On note $X \perp\!\!\!\perp Y$. De façon équivalente, la distribution de probabilité de (X, Y) est donné par

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x).\mathbb{P}(Y = y).$$

Extension au cas de n variables aléatoires.

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors, pour toutes fonctions f et g, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. Extension au cas de plusieurs variables aléatoires.
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ le sont aussi. Extension à plusieurs coalitions.
Suite de variables aléatoires indépendantes. Suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (suites i.i.d).
On ne soulève aucunes difficultés sur l'existence d'un espace probabilisé portant une suite de variables aléatoires i.i.d.
Application à la modélisation d'un jeu de pile ou face infini par une suite de variables aléatoires de Bernoulli (mutuellement) indépendantes.
Exemple : somme de deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson (*), de deux variables indépendantes suivant des lois géométriques indépendantes de même paramètre (vu en exercice).

Dénombrabilité, sommabilité : usage réservé au contexte probabiliste, notion sans évaluation spécifique.
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$ (programme officiel). Ensemble au plus dénombrable (en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$).
Un ensemble dénombrable peut s'écrire en extension sous la forme $\{x_i\,,\, i \in \mathbb{N}\}$ et un ensemble au plus dénombrable peut s'écrire en extension sous la forme $\{x_i\,,\, i \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$ et les x_i distincts.

Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{N}^2$, d'un produit cartésien de deux ou plusieurs ensembles dénombrables.
Toute union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

Familles sommables : méthodes et résultats seront admis, et directement utilisés. Chaque professeur est libre d'en adapter le contenu au niveau de formalisme qu'il juge préférable pour ses étudiants.
Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste (ce qui est à mon sens un quasi-mensonge vu le sujet centrale 2023).

En vue de généraliser les sommes finies et les sommes de séries de réels positifs, on admet sans soulever de difficulté qu'on sait associer à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ sa somme $\displaystyle\sum_{i \in I} x_i \in [0, +\infty]$, et pour tout découpage en paquets $I = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ de I, $\displaystyle\sum_{i \in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right)$.

– La famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} x_i < +\infty$. En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité. On peut utiliser croissance, linéarité positive, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes.

– Une famille $(x_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est. Pour $I=\mathbb{N}$, la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée. Si $|x_i| \leqslant y_i$ pour tout $i\in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in I}$ implique celle de $(x_i)_{i\in I}$.
En cas de sommabilité, les sommes se manipulent naturellement grâce aux propriétés suivantes : croissance, linéarité, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes.

Quelques exemples traités :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^n} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty}(\zeta(n)-1)(*) \qquad \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{p^q}{\mathrm{e}^{2p}q!} \qquad \sum_{\substack{n,k\geqslant 1\\ n>k}} \frac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}$$

Exemple initial de non sommabilité avec $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ où la mise en paquets donne des sommes différentes, pour bien montrer la problématique.

Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0,+\infty]$ définie par $\sum_{x\in\Omega(X)} x\mathbb{P}(X=x)$. On adopte la convention $xP(X=x)=0$ lorsque $x=+\infty$ et $\mathbb{P}(X=+\infty)=0$.
Espérance d'une variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes : lorsque $(x\mathbb{P}(X=x))_{x\in\omega(X)}$ est sommable. Variable centrée.
Lorsque X est à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, on a $E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X\geqslant n)$.

Théorème de transfert : si X est une variable aléatoire réelle et f une application définie sur l'image de X, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)\mathbb{P}(X=x))_{x\in\Omega(X)}$ est sommable. Dans ce cas, on a :

$$E(f(X)) = \sum_{x\in\Omega(X)} f(x)\mathbb{P}(X=x)$$

Linéarité de l'espérance. Positivité, croissante.
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement $|X|$ l'est ; on a $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$.
Si $|X|\leqslant Y$ et $E(Y)<+\infty$, alors X est d'espérance finie et on a $|E(X)|\leqslant E(Y)$.
Si X positive et $E(X)=0$, alors $(X=0)$ est presque sûr.
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes d'espérance finie, alors XY aussi et on a $E(XY)=E(X)E(Y)$. La réciproque est fausse. Généralisation à plusieurs.

Espérance d'une variable aléatoire constante, de variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli, la loi binomiale, la loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$ ou sur $\{a,\dots,b\}$ (a et b entiers), la loi géométrique, la loi de Poisson.

Questions de cours :

- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.