Devoir en temps libre n°5

Exercice A

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \ldots, n, \ldots$.
Il ne peut tenter de passer la hauteur $n+1$ que s'il a réussi les sauts aux hauteurs $1, 2, \ldots, n$.
En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au n-ième saut est : $p_n = \frac{1}{n}$. Ainsi, le premier saut est toujours réussi.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'évènement : «le sauteur a réussi son k-ième saut» et on note X la variable aléatoire réelle égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.
2. Rappeler sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction exponentielle.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
4. Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.
5. Justifier que $[X = 2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $\mathbb{P}([X = 2])$.
6. Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer l'évènement $[X = n]$ en fonction d'évènements du type S_k.
7. Déterminer la loi de X.
8. Vérifier par le calcul que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = 1$.
9. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

Exercice B

1. Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, tout $(x_1, \ldots, x_n)$ de $[-1, +\infty[$, on a
$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \leqslant \mathrm{e}^{x_1 + \cdots + x_n}.$$
2. On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants tels que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \prod_{p=n}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_p)) = 0$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $\displaystyle B_n = \bigcup_{p\geqslant n} A_p$.
   Vérifier que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements.
   (c) Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

(d) Montrer que

$$\mathbb{P}(\overline{B_n}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geqslant n} \overline{A_k}\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}\right)$$

(e) En déduire que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = 1.$$

(f) Quelle est la signification (en termes de réalisation) de l'événement

$$E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} A_p$$

et que dire de cet événement ?

3. On suppose que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge mais on ne suppose plus l'indépendance des A_n.

(a) Justifier l'existence pour tout n de $\sum_{p=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_p)$.

(b) Montrer que $\mathbb{P}(E) = 0$. Interprétation.