Devoir en temps libre n°4

Autour des matrices tridiagonales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on pose

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note I_n la matrice identité d'ordre n.
Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par convention $M^0 = I_n$.
Les trois sous-parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A : Cas des matrices 3×3 et 4×4 − Applications en physique et chimie

1. **Préliminaires**
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$.
   (b) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $a_0, \ldots, a_N$ dans $\mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k A^k = P\left(\sum_{k=0}^{N} a_k B^k\right)P^{-1}$, c'est à dire, que pour tout polynôme Q, on a $Q(A) = PQ(B)P^{-1}$.
   (c) Expliciter $Q(B)$ lorsque B est la matrice diagonale : $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ et Q un polynôme.

2. **Diagonalisation d'une famille de matrice 3×3**

   On considère dans cette question les matrices $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Déterminer une matrice diagonale D_3 et une matrice inversible P_3 telles que $A_3 = P_3D_3P_3^{-1}$.
   On trouvera $\mathrm{Sp}(A_3) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$. On ne cherchera pas à calculer P^{-1}.

(b) On considère l'ensemble $\mathcal{F} = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} |(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Montrer que $\mathcal{F} = \text{Vect}((A_3, J, I_3)$. En déduire que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en donner une base ainsi que la dimension.

(c) Exprimer A_3^2 en fonction de J et de I_3.

(d) Soit $M(a,b,c)$ appartenant à $\mathcal{F}$. Exprimer $M(a,b,c)$ en fonction de I_3, A_3 et A_3^2.

(e) À l'aide de la question 1, en déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $M(a,b,c)$.

3. **Application en physique**

On considère, dans cette question, la matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On considère un système de 3 oscillateurs couplés, où les 4 ressorts sont identiques et de constante de raideur k. Les positions des masses m sont repérées par leurs abscisses x_1, x_2 et x_3 à partir de leur position d'origine respective O_1, O_2 et O_3, positions pour lesquelles les ressorts ne sont pas tendus. on suppose qu'on lâche les masses aux abscisses x_{1m}, x_{2m} et x_{3m} sans vitesse initiale.

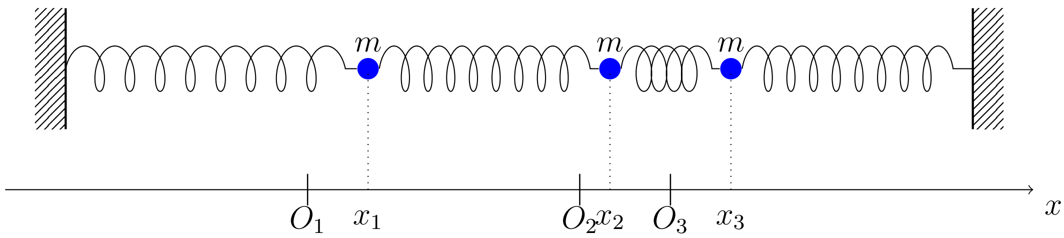

Figure 1 – 3 oscillateurs couplés

On montre, en appliquant le principe fondamental de la dynamique et en posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ avec $\omega_0 > 0$ que les abscisses x_1, x_2 et x_3 vérifient le système différentiel

$$(S1) \begin{cases} x_1''(t) & = -2\omega_0^2 x_1(t) + \omega_0^2 x_2(t) \\ x_2''(t) & = \omega_0^2 x_1(t) - 2\omega_0^2 x_2(t) + \omega_0^2 x_3(t) \\ x_3''(t) & = \omega_0^2 x_2(t) - 2\omega_0^2 x_3(t) \end{cases}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer une matrice M_3 telle que (S_1) s'écrive $X''(t) = M_3 X(t)$.

(b) Exprimer cette matrice M_3 en fonction de A_3 et de I_3.

(c) En déduire une matrice D_3' diagonale et une matrice P_3' inversible telles que $M_3 = P_3' D_3' P_3'^{-1}$.

(d) Résoudre alors le système $(S1)$, c'est à dire déterminer les expressions de x_1, x_2 et x_3 en fonction de t et des conditions initiales x_{1m}, x_{2m}et x_{3m}. On posera $X = PY$ et on déterminera en premier Y.

4. **Application en chimie**

On considère dans cette question la matrice $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans le modèle quantique de l'atome, on ne considère plus que les électrons d'un atome sont en orbite circulaire autour du noyau, mais occupent de manière probabiliste certaines régions de l'espace autour du noyau. Une orbitale atomique correspond à une région de l'espace dans laquelle on a 95% de chance de trouver un électron considéré. Pour une molécule, constituée de plusieurs atomes, on parle d'orbitale moléculaire. En 1930, Hückel[1] publie une méthode permettant de déterminer des orbitales moléculaires qui conduit à diagonaliser des matrices tridiagonales.

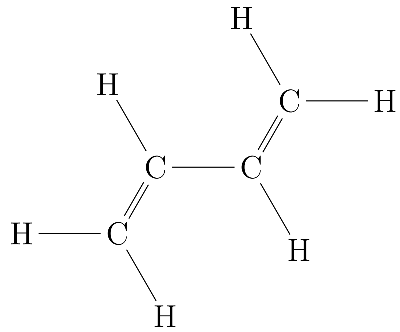

FIGURE 2 – trans-butadiène

Par exemple, si on s'intéresse à la construction des orbitales moléculaires du trans-butadiène (figure 2), les orbitales moléculaires, notées π, sont des combinaisons linéaires d'orbitales atomiques, notées respectivement p_1, p_2, p_3 et p_4 des atomes de carbone, elles s'écrivent sous la forme $\pi = C_1p_1 + C_2p_2 + C_3p_3 + C_4p_4$. On est alors amené à déterminer les valeurs de ε, pour lesquelles il existe C_1, C_2, C_3 et C_4 réels non tous nuls, solutions du système

$$(S2)\begin{cases} \alpha C_1 + \beta C_2 & = \varepsilon C_1 \\ \beta C_1 + \alpha C_2 + \beta C_3 & = \varepsilon C_2 \\ \beta C_2 + \alpha C_3 + \beta C_4 & = \varepsilon C_3 \\ \beta C_3 + \alpha C_4 & = \varepsilon C_4 \end{cases}$$

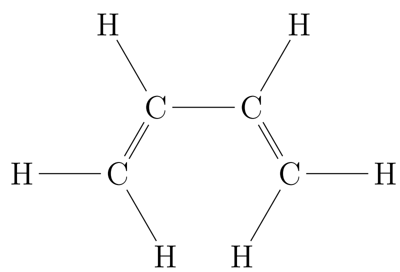

FIGURE 3 – cis-butadiène

Les différentes valeurs de ε que l'on va trouver correspondent aux énergies des différentes orbitales moléculaires possibles. α et β sont des constantes données, indépendantes des atomes de carbone considérés. La constante α correspond à une énergie propre à l'atome de carbone. La constante β correspond à une énergie d'interaction entre deux atomes de carbone voisins.

1. Erich Armand Arthur Joseph Hückel (1896 – 1980) Physicien et chimiste allemand

(a) À la recherche des valeurs propres et vecteurs propres de quelle matrice correspond la recherche des ε, pour lesquelles il existe C_1, C_2, C_3 et C_4 non tous nuls , solutions de $(S2)$?
On note M_4 cette matrice.

(b) Exprimer M_4 en fonction de I_4 et de A_4.

(c) On admet que si on pose $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or),

$$D_4 = \begin{pmatrix} \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varphi \end{pmatrix} \text{ et } P_4 = \begin{pmatrix} \varphi-1 & \varphi & \varphi & \varphi-1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \varphi-1 & \varphi & -\varphi & 1-\varphi \end{pmatrix},$$

alors P_4 inversible et $D_4 = P_4^{-1} A_4 P_4$.

Déterminer, en fonction de φ, une matrice D'_4 diagonale et une matrice P'_4 inversible telle que $D'_4 = P'^{-1}_4 M_4 P'_4$. En déduire les différentes valeurs de ε possibles et, pour chaque valeur de ε, les valeurs de C_1, C_2, C_3 et C_4 correspondantes.

(d) On s'intéresse maintenant aux orbitales moléculaires de la molécule de cis-butadiène (cf figure 3). On souhaite appliquer à cette molécule la même méthode que précédemment, mais sans négliger l'énergie d'interaction entre le premier et le dernier atome de carbone. Quels coefficients de M_4 doit-on modifier ? On ne demande pas de calcul.

Partie B : Diagonalisation de A_n

Ce serait une belle histoire, mais il est déjà un peu tard.

Partie A

1. (a) On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Pour $k = 0$, $A^0 = I_n$ et $PB^0P^{-1} = PP^{-1} = I_n$ et ainsi on a bien $A^0 = PB^0P^{-1}$. On suppose que $A^k = PB^kP^{-1}$, alors

$$A^{k+1} = AA^k = (PBP^{-1})(PB^kP^{-1}) = PB(\underbrace{P^{-1}P}_{=I_n})B^kP^{-1} = PB^{k+1}P^{-1}$$

ce qui achève la récurrence. Donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}\,,\ A^k = PB^kP^{-1}}$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_N$ des réels, nous avons ainsi en factorisant par P à gauche puis P^{-1} à droite

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} a_k A^k = \sum_{k=0}^{N} a_k PB^kP^{-1} &= P\left(\sum_{k=0}^{N} a_k B^k P^{-1}\right)\\ &= P\left(\sum_{k=0}^{N} a_k B^k\right)P^{-1}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}\,,\ \forall (a_0, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}\,,\ \sum_{k=0}^{N} a_k A^k = P\left(\sum_{k=0}^{N} a_k B^k\right)P^{-1}}$$

(c) Si B est une matrice diagonale, on a

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,,\ B^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

et ainsi

$$\sum_{k=0}^{N} a_k B^k = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

que l'on peut écrire en posant $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k X^k$,

$$Q(B) = \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Q(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

2. (a) (Par le théorème spectral, A_3 étant une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable.) Il s'agit ici d'effectuer la diagonalisation. On commence par déterminer le polynôme caractéristique de A_3 :

$$\begin{aligned}\chi_{A_3}(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - 2) \\ &= \lambda(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2})\end{aligned}$$

Ainsi le spectre de A_3 est $\{-\sqrt{2}, 0\sqrt{2}\}$. Comme nous avons 3 valeurs propres distinctes, nous retrouvons le fait que A_3 est diagonalisable. On détermine alors les trois espaces propres (qui sont des droites vectorielles).

$$A_3X = 0X \iff \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1)$$

Ainsi $E_0 = \text{Vect}((1, 0, -1))$. On pose $v_1 = (1, 0, -1)$.

$$\begin{aligned} A_3X = \sqrt{2}X &\iff \begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ x + z = \sqrt{2}y \\ y = \sqrt{2}z \end{cases} \iff \begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ z = x \\ x + z = 2x = \sqrt{2}\sqrt{2}x \text{ vraie} \end{cases} \\ &\iff (x, y, z) = (x, \sqrt{2}x, x) = x(1, \sqrt{2}, 1) \end{aligned}$$

Ainsi $E_{\sqrt{2}} = \text{Vect}\left((1, \sqrt{2}, 1)\right)$. on pose $v_2 = (1, \sqrt{2}, 1)$.

$$\begin{aligned} A_3X = -\sqrt{2}X &\iff \begin{cases} y = -\sqrt{2}x \\ x + z = -\sqrt{2}y \\ y = -\sqrt{2}z \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\sqrt{2}x \\ z = x \\ x + z = 2x = -\sqrt{2}(-\sqrt{2}x) \text{ vraie} \end{cases} \\ &\iff (x, y, z) = (x, -\sqrt{2}x, x) = x(1, -\sqrt{2}, 1) \end{aligned}$$

Ainsi $E_{-\sqrt{2}} = \text{Vect}\left((1, -\sqrt{2}, 1)\right)$. On pose $v_3 = (1, -\sqrt{2}, 1)$ et

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a d'après la formule de changement de base $D_3 = P_3^{-1}A_3P_3$ soit encore $A_3 = P_3D_3P_3^{-1}$, P_3 étant la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3).

(b) On remarque que

$$M(a, b, c) = aI_3 + cA_3 + bJ$$

et ainsi $\mathcal{F} = \text{Vect}(I_3, A_3, J)$. Donc $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. De plus, la famille (I_3, A_3, J) est génératrice de $\mathcal{F}$ et si $aI_3+cA_3+bJ = 0$, nous obtenons $M(a, b, c) = 0$ ce qui entraîne bien sûr que $a = b = c = 0$. Ainsi (I_3, A_3, J) est libre. On en déduit que (I_3, A_3, J) est une base de $\mathcal{F}$, qui est donc de dimension 3.

(c) On a

$$\begin{array}{rcl} & & \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \\ A_3^2 = & \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} = I_3 + J \end{array}$$

(d) Ainsi

$$M(a, b, c) = aI_3 + bJ + cA_3 = aI_3 + b(A_3^2 - I_3) + cA_3 = (a - b)I_3 + cA_3 + bA_3^2$$

(e) Ainsi en appliquant les préliminaires,

$$\begin{aligned} M(a, b, c) &= (a - b)I_3 + cA_3 + bA_3^2 \\ &= P\left((a - b)I_3 + cD_3 + bD_3^2\right)P^{-1} \\ &= P_3 \begin{pmatrix} a - b & 0 & 0 \\ 0 & a - b + c\sqrt{2} + 2b & \\ 0 & 0 & a - b - c\sqrt{2} + 2b \end{pmatrix} P_3^{-1} \\ &= P_3 \begin{pmatrix} a - b & 0 & 0 \\ 0 & a + b + \sqrt{2}c & 0 \\ 0 & 0 & a + b - \sqrt{2}c \end{pmatrix} P_3^{-1} \end{aligned}$$

On en déduit que les valeurs propres de $M(a, b, c)$ sont $0, a + b + \sqrt{2}c, a + b - \sqrt{2}c$ et (v_1, v_2, v_3) est une base de vecteurs propres.

3. (a) Nous avons

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1''(t) \\ x_2''(t) \\ x_3''(t) \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ 0 & \omega_0^2 & -2\omega_0^2 \end{pmatrix} & \end{array}$$

et ainsi on pose

$$M_3 = \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ 0 & \omega_0^2 & -2\omega_0^2 \end{pmatrix} = M(-2\omega_0^2, 0, \omega_0^2)$$

(b) Ainsi $M_3 = M(-2\omega_0^2, 0, \omega_0^2) = -2\omega_0^2 I_3 + \omega_0^2 A_3$.

(c) Nous avons d'après la question 2., $M_3 = P_3 D_3' P_3^{-1}$ avec $a = -2\omega_0^2$, $b = 0$, $c = \omega_0^2$,

$$\begin{aligned} D_3' &= \begin{pmatrix} a - b & 0 & 0 \\ 0 & a + b + \sqrt{2}b & 0 \\ 0 & 0 & a + b - \sqrt{2}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2(2 - \sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0^2(2 + \sqrt{2}) \end{pmatrix} \\ &= \omega_0^2 \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -(2 - \sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) On pose $X = PY$. Ainsi $X' = PY'$ et $X'' = PY''$. Alors

$$X'' = M_3 X \iff PY'' = PD_3P^{-1}PX \iff Y'' = D_3 Y$$

soit encore

$$\begin{cases} y_1''(t) = -2\omega_0^2 y_1(t) \\ y_2''(t) = -(2-\sqrt{2})\omega_0^2 y_2(t) \\ y_3''(t) = -(2+\sqrt{2})\omega_0^2 y_3(t) \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} y_1(t) = \alpha\cos(\sqrt{2}\omega_0 t) + \alpha'\sin(\sqrt{2}\omega_0 t) \\ y_2(t) = \beta\cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\omega_0 t\right) + \beta'\sin\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\omega_0 t\right) \\ y_3(t) = \gamma\cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega_0 t\right) + \gamma'\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega_0 t\right) \end{cases}$$

Nous déterminons dès cette étape les constantes en utilisant les conditions initiales : on a

$$X(0) = \begin{pmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \\ x_{3m} \end{pmatrix} \qquad X'(0) = 0$$

et ainsi $Y'(0) = P_3^{-1}X'(0) = 0$ ce qui entraîne $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$. Puis la condition

$$\begin{pmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \\ x_{3m} \end{pmatrix} = X(0) = P_3 Y(0) = \begin{pmatrix} \alpha+\beta+\gamma \\ \sqrt{2}\beta - \sqrt{2}\gamma \\ -\alpha+\beta+\gamma \end{pmatrix}$$

En résolvant ce système (ce qui revient à inverser P_3), on détermine les constantes α, β, γ :

$$\begin{cases} 2\alpha = x_{1m} - x_{3m} \\ \beta+\gamma = x_{1m} - \alpha = \frac{x_{1m}+x_{3m}}{2} \\ \beta-\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}x_{2m} \end{cases}$$

donc $\alpha = \frac{x_{1m}-x_{2m}}{2}$,

$$\beta = \frac{x_{1m}+x_{3m}}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}}x_{2m} = \frac{x_{1m}+\sqrt{2}x_{2m}+x_{3m}}{4}$$

et

$$\gamma = \frac{x_{1m}+x_{3m}}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}}x_{2m} = \frac{x_{1m}-\sqrt{2}x_{2m}+x_{3m}}{4}$$

Ainsi

$$\begin{cases} y_1(t) &= \frac{x_{1m}-x_{2m}}{2}\cos(\sqrt{2}\omega_0 t) \\ y_2(t) &= \frac{x_{1m}+\sqrt{2}x_{2m}+x_{3m}}{4}\cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\omega_0 t\right) \\ y_3(t) &= \frac{x_{1m}-\sqrt{2}x_{2m}+x_{3m}}{4}\cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega_0 t\right) \end{cases}$$

On en déduit alors x_1, x_2 et x_3 par la relation $X = PY$:

$$\begin{cases} x_1(t) &= y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \\ x_2(t) &= \sqrt{2}y_2(t) - \sqrt{2}y_3(t) \\ x_3(t) &= -y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \end{cases}$$

4. (a) Le système $(S2)$ s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0 & 0\\ \beta & \alpha & \beta & 0\\ 0 & \beta & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & \beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\end{pmatrix} = \varepsilon\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\end{pmatrix}$$

ce qui donne la matrice M_4 demandée.

(b) On a $M_4 = \alpha I_4 + \beta A_4$.

(c) Ainsi

$$\begin{aligned}P_4 M_4 P_4^{-1} &= P_4(\alpha I_4 + \beta A_4)P_4^{-1} = \alpha I_4 + \beta D_4\\ &= \begin{pmatrix}\alpha+\beta\varphi & 0 & 0 & \\ 0 & \alpha+\beta(1-\varphi) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha+\beta(\varphi-1) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\beta\varphi\end{pmatrix} = D_4'\end{aligned}$$

Les valeur de ε possibles sont :
– $\alpha+\beta\varphi$ avec C non nul proportionnel à $(\varphi-1, 1, 1, \varphi-1)$
– $\alpha+\beta(1-\varphi)$ avec C non nul proportionnel à $(\varphi, -1, -1, \varphi)$
– $\alpha+\beta(\varphi-1)$ avec C non nul proportionnel à $(\varphi, 1, 1, -\varphi)$
– $\alpha-\beta\varphi$ avec C non nul proportionnel à $(\varphi-1, -1, 1, 1-\varphi)$

(d) On devrait modifier la matrice M_4 en

$$M_4 = \begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0 & \boxed{\beta}\\ \beta & \alpha & \beta & 0\\ 0 & \beta & \alpha & \beta\\ \boxed{\beta} & 0 & \beta & \alpha\end{pmatrix}$$

La matrice restant symétrique réelle, elle est aussi diagonalisable.