Quinzaine 8 du 20/01 au 31/01

Chapitre 6 : *Probabilités*
Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0,+\infty]$ définie par $\sum_{x\in\Omega(X)} x\mathbb{P}(X=x)$. On adopte la convention $xP(X=x)=0$ lorsque $x=+\infty$ et $\mathbb{P}(X=+\infty)=0$.
Espérance d'une variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes : lorsque $(x\mathbb{P}(X=x))_{x\in\omega(X)}$ est sommable. Variable centrée.
Lorsque X est à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, on a $E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X\geqslant n)$.
Théorème de transfert : si X est une variable aléatoire réelle et f une application définie sur l'image de X, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)\mathbb{P}(X=x))_{x\in\Omega(X)}$ est sommable. Dans ce cas, on a :

$$E(f(X))=\sum_{x\in\Omega(X)} f(x)\mathbb{P}(X=x)$$

Linéarité de l'espérance. Positivité, croissante.
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement $|X|$ l'est ; on a $|\mathbb{E}(X)|\leqslant\mathbb{E}(|X|)$.
Si $|X|\leqslant Y$ et $E(Y)<+\infty$, alors X est d'espérance finie et on a $|E(X)|\leqslant E(Y)$.
Si X positive et $E(X)=0$, alors $(X=0)$ est presque sûr.
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes d'espérance finie, alors XY aussi et on a $E(XY)=E(X)E(Y)$. La réciproque est fausse. Généralisation à plusieurs.

Espérance d'une variable aléatoire constante, de variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli, la loi binomiale, la loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$ ou sur $\{a,\dots,b\}$ (a et b entiers), la loi géométrique, la loi de Poisson.
Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.
Si X^2 est d'espérance finie, la variance de X est le réel $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)$.
On a aussi $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2$ (formule de Koenig).
Écart type $\sigma(X)=\sqrt{\mathbb{V}(X)}$.
Formule $\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(x)$.
Variable aléatoire centrée, centrée réduite.
Variance des lois usuelles (on peut ici utiliser le fait que la variance d'une somme de variables indépendantes est la somme des variances). Variables aléatoires de variance nulle.

Inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev (*).

Variance d'une somme de variables aléatoires de carrée d'espérance finie.

Covariance (coefficient de corrélation n'est plus au programme).
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y sont de carré d'espérance finie, alors $E(XY)^2\leqslant E(X^2)E(Y^2)$. Cas d'égalité.

Variance d'une somme de variables aléatoires de carrée d'espérance finie deux à deux indépendantes.

Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$:
$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n = \mathbb{E}(t^X)$$
Le rayon de convergence est au moins égal à 1. Convergence normale de la série génératrice sur $[-1, 1]$.

La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa série génératrice G_X.
Pour tout p entier, sur $]-R_X, R_X[$, on a
$$G_X^{(p)}(t) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)\mathbb{P}(X = n)t^n = \mathbb{E}(X(X-1)\cdots(X-p+1)t^{X-p})$$
La variable aléatoire X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ si et seulement si G_X est dérivable (à gauche) en 1 et, si tel est le cas, $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$. Démonstration non exigible.

La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable (à gauche) en 1 et on a $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$. Démonstration non exigible.

Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\mathbb{V}(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et de $G''_X(1)$ en cas d'existence. Cas où le rayon est strictement supérieur à 1.

Série génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes (*). Généralisation à plusieurs.

Série génératrice des lois usuelles, espérance et variance (*).

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson (ce n'est plus au programme) : si pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$
Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.
La notion de convergence en loi est hors programme.

Loi faible des grands nombres (*) : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi (identiquement distribuées) admettant un moment d'ordre 2 (une variance finie), alors, si $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$,
$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
sachant que
$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Questions de cours :

- Les énoncés des définitions, des théorèmes.
- Les démonstrations marquées par (*).
- Les méthodes usuelles sur des exemples.