# Devoir en temps libre n°5

## Exercice A

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \ldots, n, \ldots$.
Il ne peut tenter de passer la hauteur $n+1$ que s'il a réussi les sauts aux hauteurs $1, 2, \ldots, n$.
En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au $n$-ième saut est : $p_n = \frac{1}{n}$. Ainsi, le premier saut est toujours réussi.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $S_k$ l'évènement : «le sauteur a réussi son $k$-ième saut» et on note $X$ la variable aléatoire réelle égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.
2. Rappeler sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction exponentielle.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire $X$.
4. Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.
5. Justifier que $[X = 2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $\mathbb{P}([X = 2])$.
6. Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer l'évènement $[X = n]$ en fonction d'évènements du type $S_k$.
7. Déterminer la loi de $X$.
8. Vérifier par le calcul que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = 1$.
9. Montrer que $X$ possède une espérance et la calculer.

## Exercice B

1. Montrer que pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}^*$, tout $(x_1, \ldots, x_n)$ de $[-1, +\infty[$, on a
$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \leqslant \mathrm{e}^{x_1 + \cdots + x_n}.$$
2. On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants tels que la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \prod_{p=n}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_p)) = 0$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \displaystyle\bigcup_{p \geqslant n} A_p$.
   Vérifier que $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements.
   (c) Montrer que
$$\mathbb{P}\left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geqslant n} A_p \right) = \mathbb{P}\left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

(d) Montrer que

$$\mathbb{P}(\overline{B_n}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geqslant n} \overline{A_k}\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}\right)$$

(e) En déduire que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = 1.$$

(f) Quelle est la signification (en termes de réalisation) de l'événement

$$E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} A_p$$

et que dire de cet événement ?

3. On suppose que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge mais on ne suppose plus l'indépendance des $A_n$.

(a) Justifier l'existence pour tout $n$ de $\sum_{p=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_p)$.

(b) Montrer que $\mathbb{P}(E) = 0$. Interprétation.

**Exercice A**

1. On rappelle la formule des probabilités composées : soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A_1, \dots, A_n$ des événements. On a si $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots A_n) > 0$,
$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots A_n) = \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}_{A_1}(A_2) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$
2. On rappelle que
$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$
3. Montrons que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Nous avons déjà bien sûr $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ par définition de $X$ (on considère que la sauteur va forcément rater un saut ...).
Si $n \in \mathbb{N}^*$, $X$ prend la valeur $n$ dans le cas où le sauteur réussi les sauts de hauteurs 1 à $n$, et rate le saut de hauteur $n+1$. Ainsi $\mathbb{N}^* \subset X(\Omega)$.
Donc l'ensemble des valeurs prises par $X$ est $\mathbb{N}^*$.
4. Nous avons $[X = 1] = S_1 \cap \overline{S_2}$. Ainsi par la définition des probabilités conditionnelles
$$\mathbb{P}([X=1]) = \mathbb{P}(S_1 \cap \overline{S_2}) = \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}_{S_1}(\overline{S_2}) = 1 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$
5. L'événement $[X = 2]$ est réalisé si et seulement si $S_1$ et $S_2$ sont réalisés et $S_3$ n'est pas réalisé. Ainsi
$$[X = 2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$$
Ainsi d'après la formule des probabilités composées,
$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X=2]) &= \mathbb{P}(S_1).\mathbb{P}_{S_1}(S_2).\mathbb{P}_{S_1 \cap S_2}(\overline{S_3}) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$
6. Soit $n \geqslant 2$, l'événement $[X = n]$ est réalisé si et seulement si $S_1, \dots, S_n$ sont réalisés et $S_{n+1}$ ne l'est pas, et ainsi
$$[X = n] = S_1 \cap \cdots S_n \cap \overline{S_{n+1}}$$
7. Par la formule des probabilités composées, on a alors
$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X=n]) &= \mathbb{P}(S_1).\mathbb{P}_{S_1}(S_2) \cdots \mathbb{P}_{S_1 \cap \cdots \cap S_{n-1}}(S_n).\mathbb{P}_{S_1 \cap \cdots \cap S_n}(\overline{S_{n+1}}) \\ &= p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n(1 - p_{n+1}) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{n}{(n+1)!} \end{aligned}$$
Le résultat est encore vrai si $n = 1$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^* = X(\Omega)$, nous avons $\mathbb{P}([X = n]) = \frac{n}{(n+1)!}$, ce qui détermine la loi de $X$.

8. Nous avons si $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}([X=n]) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n+1-1}{(n+1)!} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} - 1 - \sum_{n=0}^{N+1} \frac{1}{n!} + 2 \\
&\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e} - 1 - \mathrm{e} + 2 = 1
\end{aligned}$$

Ainsi on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) = 1$.

9. On étudie la sommabilité de $(n\mathbb{P}([X=n])_{n\in\mathbb{N}^*}$, c'est à dire ici aussi la convergence (équivalente à la convergence absolue) de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{(n+1)!}$. On procède par les sommes partielles. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{n^2}{(n+1)!} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{n(n+1)-n}{(n+1)!} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!} \\
&\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e} - 1
\end{aligned}$$

Ainsi la variable aléatoire $X$ admet une espérance finie, et on a $\mathbb{E}(X) = \mathrm{e} - 1$.

## Exercice B

1. Soit $n$ de $\mathbb{N}^*$, et $(x_1, \ldots, x_n)$ de $[-1, +\infty[$.
La convexité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ (la fonction exponentielle est deux fois dérivable, et sa dérivée seconde étant égale à elle même est positive ou nulle) prouve que la tangente en 0 est située en dessous de la courbe, c'est à dire

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$$

Ainsi nous avons

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ 0 \leqslant 1 + x_k \leqslant \mathrm{e}^{x_k}$$

On a ainsi en faisant le produit (termes positifs)

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x_k} = \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n} x_k}.$$

2. On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants tels que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on applique le résultat précédents aux nombres $-\mathbb{P}(A_p)$, $p$ de $n$ à $N$, nombres qui sont bien dans $[-1,+\infty[$ puisque en fait dans $[-1,0]$ : on a

$$0 \leqslant \prod_{p=n}^{N}(1-\mathbb{P}(A_p)) \leqslant \mathrm{e}^{-\sum\limits_{p=n}^{N}\mathbb{P}(A_p)}$$

Or par hypothèse, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(A_n)$ diverge, et ainsi $-\sum\limits_{p=n}^{N}\mathbb{P}(A_p)$ tend vers $-\infty$ lorsque $N$ tend vers $+\infty$, et ainsi par encadrement, $\lim\limits_{N\to+\infty}\prod\limits_{p=n}^{N}(1-\mathbb{P}(A_p)) = 0$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \bigcup\limits_{p\geqslant n} A_p$.

Nous avons pour tout entier $n$,

$$B_n = \bigcup_{p\geqslant n} A_p = A_n \cup \bigcup_{p\geqslant n+1} A_p = A_n \cup B_{n+1} \supset B_{n+1}$$

Ainsi $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements.

(c) D'après le théorème de continuité décroissante, on a donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(B_n).$$

(d) On a

$$\mathbb{P}(\overline{B_n}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geqslant n}\overline{A_k}\right)$$

et comme la suite $\left(\bigcap\limits_{k\geqslant n}\overline{A_k}\right)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante d'événements,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geqslant n}\overline{A_k}\right) = \lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N}\overline{A_k}\right)$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(\overline{B_n}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geqslant n}\overline{A_k}\right) = \lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N}\overline{A_k}\right)$$

(e) Comme les $A_n$ sont indépendants, les $\overline{A_n}$ aussi et donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N}\overline{A_k}\right) = \prod_{k=n}^{N}\mathbb{P}(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{N}(1-\mathbb{P}(A_k)) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi $\mathbb{P}(\overline{B_n}) = 0$, et donc $\mathbb{P}(B_n) = 1$. On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = 1.$$

(f) L'événement

$$E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} A_p$$

est réalisé si et seulement si pour tout $n$, $B_n$ est réalisé.
L'événement $E$ n'est pas réalisé si il existe $n_0$ tel que $B_{n_0}$ ne soit pas réalisé, c'est à dire tel que $\forall p \geqslant n_0$, $A_p$ n'est pas réalisé, c'est à dire si il y a un nombre fini d'indices $n$ tel que $A_n$ soit réalisé (c'est bien équivalent, penser au deux sens).

Ainsi $E$ est réalisé si et seulement si il y a un nombre infini d'indices $n$ tel que $A_n$ soit réalisé (attention).

Cet événement est de probabilité 1, c'est à dire qu'il est quasi-certain.
Il est donc presque sûr qu'il y ait une infinité d'indice $n$ de sorte que $A_n$ soit réalisé.

3. On suppose que la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge.

(a) Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente, on peut définir pour tout $n$, $\sum\limits_{p=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_p)$, qui est le reste d'ordre $n-1$ si $n \geqslant 1$, et qui tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

(b) On a

$$P(B_n) = P\left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) \leqslant \sum_{k=p}^{+\infty} \mathbb{P}(A_p)$$

et ainsi $P(B_n)$ tend vers 0. On a donc par le théorème de continuité décroissante, $\mathbb{P}(E) = 0$.
Ainsi $E$ est quasi-impossible : il est donc presque sûr qu'il y ait un nombre fini d'indices $n$ tel que $A_n$ soit réalisé.