Devoir surveillé n°6
4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Exercice A

On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant des lois de Poisson de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ respectivements.

1. Rappeler quelles situations peuvent être modélisées par une loi de Poisson.
2. Quelle est la loi de $S = X + Y$? Quelle est son espérance ? Sa variance ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que
$$\forall k \in \mathbb{N}\,,\ \mathbb{P}_{(S=n)}(X = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \end{cases}$$
avec $p \in]0, 1[$ à préciser. Que peut-on en déduire pour la loi conditionnelle de X sachant $(S = n)$?
Quelle est la loi conditionnelle de Y sachant $(S = n)$?
4. On sait qu'il y a en moyenne 10 accidents la semaine ouvrable (5 jours) et un accident le week-end (2 jours) sur un tronçon routier.
Cette semaine, 11 accidents au total ont eu lieu, sans plus de précision.
Quelle est la probabilité (conditionné par cette connaissance) qu'il y ait eu 1 accident le week-end ?

Exercice B :

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{B}(p)$ avec $\lambda > 0$ et $p \in]0, 1[$.
On note $Z = XY$ et G_X, G_Y et G_Z les fonctions génératrices de X, Y et Z respectivement.

1. Déterminer $Z(\Omega)$.
2. Exprimer $(Z = 0)$ à l'aide d'événements $(X = k)$ et $(Y = k)$.
Montrer que $\mathbb{P}(Z = 0) = q + p\mathrm{e}^{-\lambda}$ où $q = 1 - p$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $(Z = n)$ à l'aide d'événements $(X = k)$ et $(Y = k)$ et en déduire $\mathbb{P}(Z = n)$.
4. Précisez G_X et G_Y. En déduire que $G_Z = G_Y \circ G_X$.
5. Montrer que Z admet une espérance et la calculer.
6. Montrer que Z admet une variance et la calculer.

Exercice C

Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2, c'est à dire telle que X^2 est d'espérance finie. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes discrètes réelles de même loi que X et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \geqslant 1$.

1. (*) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. (*) Montrer que si $\delta > 0$, et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X)| \geqslant n\delta) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{n\delta^2}$$

3. Soit u et v deux réels de sorte que $u < \mathbb{E}(X) < v$, on pose $\delta = \min(v - \mathbb{E}(X), \mathbb{E}(X) - u)$.
   (a) (**) Montrer que $(nu < S_n < nv) \supset (|S_n - n\mathbb{E}(X)| < n\delta)$. On pourra s'aider d'un dessin.
   (b) (*) En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\mathbb{P}(nu \leqslant S_n \leqslant nv)$.

Problème A

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit X une variable aléatoire finie, avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Pour tout entier n de $\{1, \dots, n\}$, on note $p_n = P(X = x_n)$. On suppose que pour tout i, $p_i > 0$. On définit l'entropie de X par

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln\left(\frac{1}{p_i}\right) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i)$$

   Intuitivement, l'entropie d'une variable aléatoire a été défini ainsi comme mesure du désordre [1]
   (a) Montrer que $H(X) \geqslant 0$. Que peut-on dire de X lorsque $H(X) = 0$? En terme d'entropie ?
   (b) On suppose que $X = U \sim \mathcal{U}(1, \dots, n)$. Montrer que $H(U) = \ln(n)$.
   (c) On suppose X quelconque.
      i. Montrer que $\forall u > 0$, $\ln(u) \leqslant u - 1 \quad (*)$ et qu'il y a égalité si et seulement si $u = 1$.
      ii. Montrer alors que $H(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln\left(\frac{1}{p_i}\right) \leqslant \ln(n) = H(U)$ et qu'il y a égalité si et seulement si on a $p_i = \frac{1}{n}$ pour tout i de $\{1, \dots, n\}$.
      iii. Conclure en terme d'entropie.
2. Soit maintenant X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On définit l'entropie de X par

$$H(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} -P(X = k) \ln(P(X = k)) \in [0, +\infty]$$

   avec l'hypothèse que $P(X = k) > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier que $H(X)$ est bien défini à valeurs dans $[0, +\infty]$.
   (b) Que peut-on dire de X si $H(X) = 0$?
   (c) On suppose que $X = G \sim \mathcal{G}(p)$ géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On rappelle que X admet une espérance finie et que $E(X) = \frac{1}{p} = m$. On note $p_k = P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$ et ainsi

$$H(G) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k \ln\left(\frac{1}{p_k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} -p_k \ln(p_k)$$

   Montrer que G admet une entropie finie et la calculer. On obtiendra

$$H(G) = -\ln(p) - \frac{1 - p}{p} \ln(1 - p).$$

1. 1948, Claude Shannon, ingénieur en génie électrique aux Laboratoires Bell

(d) Soit X quelconque, d'espérance finie $m = \dfrac{1}{p}$ égale à celle de G.

On pose $q_k = P(X = x_k) > 0$ et ainsi

$$H(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} q_k \ln\left(\frac{1}{q_k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} -q_k \ln(q_k)$$

avec $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kp_k = m = \frac{1}{p}$.

i. Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a

$$-q_k \ln(q_k) + q_k \ln(p_k) \leqslant p_k - q_k$$

(on utilisera pour cela (*) appliquée à $\frac{p_k}{q_k}$) puis que

$$-q_k \ln(q_k) \leqslant -q_k \ln(p) - (k-1) q_k \ln(1-p) + p_k - q_k$$

ii. En déduire que X admet une entropie finie et que $H(X) \leqslant H(G)$ et qu'il y a égalité si et seulement si X a la même loi que G.

iii. Exprimer ce résultat en termes d'entropie.

3. Pour une variable aléatoire discrète X on note désormais d'après la justification de la question 2a)

$$H(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} -P(X = x) \ln(P(X = x)) \in [0, +\infty]$$

Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors

$$H((X, Y)) = H(X) + H(Y).$$

On rappelle que $(X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et que la loi du couple (X, Y) est donnée par les $P(X = x, Y = y)$ pour $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Problème B : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On considère une particule se déplaçant sur une droite graduée par les entiers relatifs. Sa position à l'instant initial $t = 0$ est $k = 0$. Á chaque instant $t \in \mathbb{N}^*$, elle se déplace aléatoirement de sa position $k \in \mathbb{Z}$ à la position $k + 1$ ou $k - 1$.

Soit $p \in]0, 1[$. On définit sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ et identiquement distribuées dont la loi est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X_t = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_t = -1) = 1 - p.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} X_t$.

Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_t modélise le déplacement de la particule à l'instant t.
Si $X_t = 1$, la particule se déplace vers la droite. Si $X_t = -1$, la particule se déplace vers la gauche. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n modélise la position de la particule après n déplacements.
On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Partie I - Un développement en série entière

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{N}$. Donner sans démonstration un développement en série entière de la fonction réelle $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ au voisinage de 0 en précisant son rayon de convergence.

2. En déduire que pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n.$$

Partie II - Probabilité de retour à l'origine

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \mathbb{P}(S_n = 0).$$

1. Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire $\frac{X_t+1}{2}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n}{2}} \big(p(1-p)\big)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Déterminer la limite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$ selon les valeurs de p et interpréter le résultat.

Partie III - Nombre de passages par l'origine

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note O_{2j} la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = 2j$, 0 sinon. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum_{j=0}^{n} O_{2j}$. On note $\mathbb{E}(T_n)$ l'espérance de la variable aléatoire T_n.
Dans cette partie, on souhaite déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que modélise la variable aléatoire T_n ?
2. Soit $j \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire O_{2j}. En déduire que :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j} \big(p(1-p)\big)^j.$$

3. On suppose dans cette question que $p \neq \frac{1}{2}$. En utilisant le résultat de la **I.2**, calculer ds $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$ et interpréter le résultat.
4. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$.