Devoir n°6

Autour de la transformée de Fourier

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrable, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $\hat{f}$ dite transformée de Fourier de f par

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2i\pi t\nu} f(t)\mathrm{d}t$$

La variable t joue le rôle du temps, ν la fréquence.

1. Montrer que la transformée de fourrier $\widehat{f}$ d'une fonction f continue par morceaux et intégrable est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer aussi que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que f admet un moment d'ordre p, c'est à dire que $t \mapsto t^p f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, avec $p \geqslant 1$.
   (a) Montrer que
   $$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ |t^{p-1}| \leqslant |t|^p + 1$$
   (b) En déduire que f admet un moment d'ordre $p-1$ puis que f admet des moments aux ordres $1, 2, \dots, p$.
   (c) Montrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et exprimer $\left(\widehat{f}\right)^{(i)}$ pour $0 \leqslant i \leqslant p$.
4. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, paire (respectivement impaire). Que peut-on dire de $\widehat{f}$?
5. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, a un réel. Montrer que $f_a : t \mapsto f(a+t)$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$ et que
   $$\forall \nu \in \mathbb{R}\,,\ \widehat{f_a}(\nu) = \mathrm{e}^{2i\pi a\nu}\widehat{f}(\nu).$$
6. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, intégrable sur $\mathbb{R}$, de limite 0 en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que l'on peut définir $\widehat{f'}$ sur $\mathbb{R}$ et que
   $$\forall \nu \in \mathbb{R}\,,\ \widehat{(f')}(\nu) = 2i\pi\nu\hat{f}(\nu).$$
7. Soit $\nu_0 \in \mathbb{R}^+$, on considère la fonction f définie par
   $$f(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{2i\pi\nu_0 t} & \text{si } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   La fonction complexe f représente un paquet d'onde sinusoïdale (durée finie) L'analyse de Fourier classique des fonctions périodiques ne peut-être utilisée ici. La transformée de Fourier

va permettre d'analyser le spectre d'un tel signal. Pour cet exemple, la fréquence qui doit être mis en évidence est ν_0. Montrer que

$$\widehat{f}(\nu) = \tau \mathrm{sinc}(\pi\tau(\nu - \nu_0))$$

où sinc représente la fonction sinus cardinale, prolongement conitnue de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$. Représenter la fonction $\widehat{f}$. Quelle fréquence est mise en évidence ?

8. Étudier de même la transformée de Fourier de la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représenter la fonction $\widehat{f}$. Quelle est la fréquence mise en évidence ?

9. On pose F définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2i\pi xt}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

transformée de Fourier de la fonction de Gauss $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$.

(a) Montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On admettra pour la suite que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

(b) Montrer que la fonction F définie une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\; F'(x) = -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-2i\pi xt}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

(d) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que l'on justifiera soigneusement que

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\; F'(x) = -2\pi^2 xF(x)$$

On rappelle que les solutions de l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = 0$$

où a est une fonction continue sur un intervalle I sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(x)}$$

où A désigne une primitive de a sur I et λ un scalaire.

(e) Déterminer $F(x)$ pour tout x réel. Conclusion ?